

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР



В.М.Ентов, А.Ф.Зазовский, Нгуен Дык Ну

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ТЕПЛОВЛАГОПЕРЕНОСА  
В КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ ТЕЛАХ

ПРЕПРИНТ № 245



МОСКВА 1985 год

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.М.ЕНТОВ, А.Ф.ЗАЗОВСКИЙ, НГУЕН ДЫК НУ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО-ВЛАГОПЕРЕНОСА В КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ  
ТЕЛАХ

Препринт № 245

Москва 1985 год

#### АННОТАЦИЯ

В рамках теории двухфазной фильтрации двухкомпонентных систем рассматривается неизотермическое движение влаги в капиллярно-пористой среде. Считается, что вода может находиться в жидком и (или) парообразном состоянии, причем давление пара в газовой фазе при наличии жидкой влаги однозначно определяется температурой и структурой пористой среды. Движение жидкой и газовой фаз описывается обобщенным законом фильтрации Дарси. Учитывается скачок капиллярного давления между фазами, диффузия пара и воздуха в газовой фазе, явления испарения и капиллярной конденсации влаги при изменении температуры; пренебрегается эффектами набухания материала под действием влажности и усадки при его сушке. Получены уравнения, описывающие процессы переноса тепла и влаги в пористой среде, и дана постановка основных краевых задач. Разработан численный метод решения одномерных задач. Приводятся результаты расчетов сушки влажного пористого слоя при повышении температуры на одном из его концов и конденсации в нем влаги при его охлаждении. Исследованы зависимости скорости сушки и увеличения влажности от режимов теплового воздействия и структуры пористой среды.

055(02)2



Институт проблем механики АН СССР, 1985 г.

#### § 1. Процессы тепло-влажностного переноса в капиллярно-пористых материалах

Исчерпывающий анализ механизмов переноса тепла и влаги в капиллярно-пористых телах дан в работах А.В.Лыкова и его школы [1,2,3]. Основными факторами, обуславливающими перемещение влаги в пористой среде, являются:

- 1) диффузия пара (и воздуха) в газовой фазе под действием перепада концентрации пара в направлении, противоположном ее градиенту;
- 2) капиллярное перемещение жидкости в порах, зависящее от структуры пористой среды и ее смачиваемости;
- 3) термическая диффузия пара (или жидкости) в направлении потока тепла от участков с более высокой температурой к участкам с более низкой (имеет место даже при отсутствии градиента концентрации пара в газовой фазе);
- 4) конвективный перенос жидкости и (или) пара под действием внешнего перепада давления.

Перенос тепла во влажной или водонасыщенной пористой среде осуществляется за счет

- 1) теплопроводности;
- 2) конвективного перемещения жидкой и (или) газовой фаз под действием любого из четырех указанных выше факторов.

Уже простое перечисление механизмов тепло-влажностного переноса в капиллярно-пористых материалах показывает, что процессы переноса тепла и влаги в них являются взаимосвязанными и должны рассматриваться в совокупности. Так, перемещение влаги в материале обычно сопровождается изменением его теплопроводности, а изменение температуры внутри или на поверхности материала приводит к диффузионному и термодиффузионному переносу в газовой фазе и может сопровождаться изменением фазового состава влаги (в результате ее испарения или конденсации). В последнем случае изменение давления приводит к

конвективному перемещению газовой фазы, а также к капиллярному и конвективному переносу жидкости, если только ее насыщенность достаточно велика (то есть больше насыщенности, при которой жидкая фаза в пористой среде является связной).

Взаимосвязанность процессов переноса тепла и влаги, как правило, не является равноправной. Обычно, и именно такие процессы рассматриваются в дальнейшем, определяющим является влияние теплопереноса на влагоперенос, а обратное влияние оказывается значительно менее существенным.

Еще одна особенность рассматриваемых процессов тепло-влагопереноса состоит в том, что скорости процессов переноса тепла и влаги, обусловленных различными механизмами переноса, могут сильно (на порядки) отличаться друг от друга. Это обстоятельство вместе с учетом фазовых переходов обуславливает основные трудности математического моделирования подобных процессов.

## § 2. Уравнения тепловлагопереноса в капиллярно-пористых телах

В настоящее время существуют два основных подхода к математическому описанию процессов тепломассопереноса в капиллярно-пористых средах. Один из них, широко применяемый в теории сушки [2], гидрологии и почвоведении [4,5], основывается на экспериментальных законах тепло- и влагопроводности и состоит во введении температурного и капиллярного потенциалов, позволяющих записать уравнения переноса тепла и влаги с эмпирическими коэффициентами, зависящими от температуры, влажности и фазового состава влаги.

Другой подход, развитый в теории многофазной многокомпонентной фильтрации [6-10], состоит в описании процесса тепловлагопереноса в капиллярно-пористой среде как одновременного движения воды, пара и воздуха в неизотермических условиях при наличии фазовых переходов [II-I4]. Последующее

изложение проводится в рамках второго подхода.

Обозначим через  $m$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $\theta$ , соответственно, пористость, абсолютную проницаемость, теплоемкость, коэффициент теплопроводности и краевой угол смачивания водой поверхностей пор пористой среды, заполненной двумя взаимопроницаемыми фазами жидкой и газообразной, содержащими два компонента - воду в жидком или парообразном состоянии и воздух. Долю порового объема, занятого жидкой влагой, будем обозначать  $S$  и называть водонасыщенностью. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  - относительные фазовые проницаемости для воды и смеси пара и воздуха,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - вязкость фаз.

В дальнейшем величины, относящиеся к воде, пару и воздуху, обозначаются индексами 1, 2 и 3, соответственно.

Считая справедливым обобщенный закон Дарси и пренебрегая термодиффузионным переносом влаги в жидкой фазе, запишем выражения для плотностей объемных потоков жидкости, пара и воздуха, соответственно, в виде

$$\vec{v}_1 = - \frac{k f_1(S, T)}{\mu_1(T)} \nabla P_1 \quad (2.1)$$

$$\vec{v}_2 = - \frac{k f_2(S, T)}{\mu_2(T)} \nabla P - \delta_2 \nabla T - \mathcal{D} \nabla C_2 \quad (2.2)$$

$$\vec{v}_3 = - \frac{k f_2(S, T)}{\mu_2(T)} \nabla P - \delta_3 \nabla T - \mathcal{D} \nabla C_3 \quad (2.3)$$

где  $P_1$ ,  $\rho_1$  - давление и плотность воды,  $P = P_2 + P_3$  и  $\rho = \rho_2 + \rho_3$  - давление и плотность газовой фазы,  $p_i$ ,  $\rho_i$  и  $C_i = p_i/P$  - парциальное давление, плотность и объемная концентрация пара ( $i = 2$ ) и воздуха ( $i = 3$ ),  $T$  - температура,  $\mathcal{D}$  - коэффициент диффузии,  $\delta_i$  - коэффициенты термодиффузии.

Для потока тепла, обусловленного теплопроводностью и конвективным переносом тепла отдельными компонентами, имеем выражение

$$\vec{q} = - \lambda \nabla T + \rho_1 h_1 \vec{v}_1 + \rho_2 h_2 \vec{v}_2 + \rho_3 h_3 \vec{v}_3 \quad (2.4)$$

Запишем основные законы сохранения: уравнения неразрывности для суммарного потока воды и пара

$$\frac{\partial}{\partial t} [ms\rho_1 + m(1-s)\rho_2] + \text{div}(\rho_1\vec{v}_1 + \rho_2\vec{v}_2) = 0 \quad (2.5)$$

для воздуха

$$\frac{\partial}{\partial t} [m(1-s)\rho_3] + \text{div}(\rho_3\vec{v}_3) = 0 \quad (2.6)$$

и уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi T + ms\rho_1 U_1 + m(1-s)(\rho_2 U_2 + \rho_3 U_3)] + \text{div}\vec{q} = 0 \quad (2.7)$$

где  $U_i = h_i - p_i / \rho_i$  - удельная внутренняя энергия,  $h_i$  - удельная энтальпия.

Система уравнений (2.1) - (2.7) замыкается условиями термодинамического равновесия. Это означает, что при наличии в элементе пористой среды жидкой фазы, то есть  $s > 0$ , парциальное давление пара в газовой фазе  $P_2$  совпадает с давлением насыщенного пара  $P_2^*(s, T)$ , а при отсутствии жидкости ( $s = 0$ ) давление пара  $P_2 \leq P_2^*(s, T)$ . Соответствующие области пористой среды далее для краткости называются влажной ( $s > 0$ ) и сухой ( $s = 0$ ) зонами. Таким образом, уравнения (2.1) - (2.7) должны быть дополнены условиями

$$P_2 = P_2^*(s, T) \text{ при } s > 0, \quad P_2 \leq P_2^*(s, T) \text{ при } s = 0 \quad (2.8)$$

Давление насыщенного пара в пористой среде находится по формуле [15]

$$P_2^*(s, T) = P_s(T) e^{-\frac{P_c(s, T)}{RT\rho_1}} \quad (2.9)$$

где  $P_s$  - давление насыщенного пара над плоской поверхностью жидкости; экспоненциальный множитель учитывает изменение давления, обусловленное кривизной поверхности раздела жидкости

и пара в порах;  $P_c$  - капиллярное давление, определяемое следующим образом:

$$P_c(s, T) = P - P_1 = \gamma(\tau) J(s), \quad \gamma = \frac{\sigma(\tau) \cos \theta(\tau)}{\sqrt{k/m}} \quad (2.10)$$

Здесь  $\sigma$  - межфазное натяжение на границе жидкой и газовой фазы,  $\theta$  - краевой угол смачивания водой поверхностей пор,  $J(s)$  - функция Леверетта, зависящая от структуры пористой среды и определяемая экспериментально [14, 15].

Будем считать пар и воздух идеальными газами. Тогда плотности пара и воздуха будут зависеть лишь от абсолютной температуры и парциальных давлений, а удельные теплосодержания воды, пара и воздуха - лишь от температуры

$$\rho_i = \rho_i(T), \quad \rho_i = \alpha_i P_i / T, \quad \alpha_i = 1 / V_i \quad (i = 2, 3) \quad (2.11)$$

$$h_1 = \chi_1 T, \quad h_2 = \chi_1 T + \tau(T), \quad h_3 = h_3(T)$$

где  $\chi_1$  - теплоемкость воды,  $V_i$  - удельная газовая постоянная для пара ( $i = 2$ ) и воздуха ( $i = 3$ ),  $\tau(T)$  - удельная теплота парообразования.

Уравнения (2.1) - (2.7) с учетом соотношений (2.8) - (2.11) образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных  $T, s, P_i, \vec{q}, v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), описывающую процессы тепловлагопереноса в капиллярно-пористых телах. Далее для краткости будем называть ее системой (I). Принципиальным является то обстоятельство, что вид уравнений во влажной и сухой зонах оказывается различным. Действительно, во влажной зоне в качестве независимых переменных естественно выбрать температуру  $T$ , насыщенность  $S$  и любое давление, скажем,  $P$ , а в сухой -  $T$  и два давления, например,  $P_2$  и  $P$ . Граница влажной и сухой зон заранее неизвестна и подлежит

отысканию. Данная ситуация типична для процессов с фазовыми переходами.

§ 3. Тепловолагоперенос при постоянном давлении  
в газовой фазе

Рассмотрим одномерный вариант теории. Жидкую фазу для простоты будем считать несжимаемой, плотность газовой фазы малой по сравнению с плотностью жидкости; будем учитывать гравитационные эффекты и пренебрегать термодиффузионным переносом. Типичная ситуация, для которой могут быть справедливы указанные допущения, это - тепловолагоперенос в приповерхностном слое почвы. Если проницаемость почвы достаточно велика, то градиент давления в газовой фазе мал, и первые слагаемые в (2.2) и (2.3) стремятся к конечным пределам. Соотношения (2.1) - (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{k f_1}{M_1} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_1 g \right) \\ v_2 &= c_2 u - D \frac{\partial c_2}{\partial x} \\ v_3 &= c_3 u - D \frac{\partial c_3}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $u$  - суммарный поток пара и воздуха,  $g$  - ускорение силы тяжести; ось  $x$  считается направленной вертикально вниз.

Уравнение для потока тепла

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_1 h_1 v_1 + \rho_2 h_2 v_2 + \rho_3 h_3 v_3 \quad (3.2)$$

и уравнение неразрывности для пара и жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} [m s \rho_1 + m (1-s) \rho_2] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) = 0 \quad (3.3)$$

а также уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} [x T + m s \rho_1 h_1 + m (1-s) (\rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) + m s (p - p_1)] + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

остаются без изменений.

Вместо уравнения (2.6) запишем уравнение неразрывности для суммарного потока воды, пара и воздуха в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} [m s n_1 + m (1-s) n] + \frac{\partial}{\partial x} (n u + n_1 v_1) = 0 \quad (3.5)$$

Здесь  $n = p/kT$  - число частиц (молекул) газа в единице объема;  $n_1 = \rho_1 / \alpha_2 k$  - число частиц жидкости в единице объема;  $k$  - постоянная Больцмана. Использование уравнения неразрывности суммарного потока в такой форме более удобно при проведении численных расчетов.

Действительно, уравнение (3.5) не содержит диффузионных потоков пара и воздуха и потому не требует вычисления производных давления  $p_2$  по координате.

Во влажной зоне ( $s > 0$ ) в качестве независимых неизвестных можно взять  $T$ ,  $s$  и  $u$ , а в сухой зоне ( $s = 0$ ) -  $T$ ,  $p_2$  и  $u$ .

Полученную систему уравнений далее для краткости будем называть системой (II). Основное отличие системы (II) от системы (I) состоит во введении новой независимой неизвестной - суммарного потока газовой фазы  $u$ , обусловленного изменением ее объема, которое может быть как следствием теплового расширения или сжатия газа, так и следствием фазовых переходов (испарения или конденсации). Новая неизвестная  $u$ , как легко убедиться, удовлетворяет вырожденному гиперболическому уравнению первого порядка (3.5) (производная  $\partial u / \partial t$  не входит в это уравнение), и потому потоки компонентов газовой фазы оказываются нелокальными функциями распределений температуры, насыщенности и давления. Другими словами, изменения объема газовой фазы в каждой точке среды мгновенно передаются



во все остальные точки рассматриваемой области в виде вклада в потоки пара и воздуха.

§ 4. Преобразования полученных систем уравнений

4.1. Рассмотрим сначала систему (II). Введем следующие характерные величины и безразмерные переменные:

$$t_{\tau} = \frac{\alpha L^2}{\lambda}, \quad t_D = \frac{L^2}{D}, \quad t_c = \frac{L^2 M_1}{k P_c^*},$$

$$u_0 = \left[ m(1-\bar{s}) \frac{T_x}{T_0} + m\bar{s} \frac{P_1}{P_2(T_1, P)} \right] \frac{L}{t_{\tau}},$$

$$v_{10} = \frac{k P_c^*}{L M_1}, \quad v_{20} = v_{30} = \frac{D}{L}, \quad \rho_{i0} = \frac{\alpha_i P}{T_x},$$

$$h_{10} = h_{20} = \alpha_1 T_x, \quad h_{30} = \alpha_3 T_x, \quad (4.1)$$

$$x = L x', \quad t = t_D t', \quad T = T_x T' + T_0, \quad u = u_0 u',$$

$$P_1 = P_c^* P_1', \quad P_i = P P_i' \quad (i = 2, 3),$$

$$\rho_i = \rho_{i0} \rho_i', \quad v_i = v_{i0} v_i', \quad h_i = h_{i0} h_i' \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$Y = Y_0 Y', \quad J = J_0 J'$$

Здесь  $L$  — толщина слоя (или длина образца с непроницаемыми и теплоизолированными боковыми стенками);  $T_0$  — начальная температура в слое;  $T_x$  — характерный перепад температуры, например, перепад температур между поверхностями слоя;  $P_c^*$  — характерное значение перепада капиллярного давления;  $t_{\tau}$ ,  $t_D$  и  $t_c$  — характерные времена теплопроводности, диффузии и фильтрации под действием капиллярных сил;  $\bar{s}$  — средняя водонасыщенность в слое;  $u_0$  — характерное значение скорости фильтрации газовой фазы  $u$ . Величина  $u_0$  определялась как произведение характерного изменения объема газовой фазы под действием характерного перепада температуры  $T_x$  на среднюю ско-

рость распространения тепловой волны; при этом учитывалось, что изменение объема может быть обусловлено как тепловым расширением (сжатием) газа, так и фазовыми переходами (испарением или конденсацией).

В дальнейшем будем спускать штрихи над безразмерными переменными. Тогда уравнения движения принимают вид

$$v_1 = -f_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} - F_g \right), \quad (4.2)$$

$$v_i = \frac{\theta}{P_e} c_i u - \frac{\partial c_i}{\partial x} \quad (i = 2, 3),$$

а уравнения сохранения энергии и неразрывности для воды и пара и суммарного потока преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} [T + m s \omega_1 h_1 + m S F Y J + m(1-S)(\omega_2 \rho_2 h_2 + \omega_3 \rho_3 h_3)] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{P_e} \frac{\partial T}{\partial x} + S_t \omega_1 h_1 v_1 + \omega_2 \rho_2 h_2 v_2 + \omega_3 \rho_3 h_3 v_3 \right] = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [m s + m(1-S) \epsilon_2 \rho_2] + \frac{\partial}{\partial x} (S_t v_1 + \epsilon_2 \rho_2 v_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{m(1-S)}{T} + \frac{m S}{\epsilon_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\theta}{P_e} \frac{u}{T} + \frac{S_t}{\epsilon_2} v_1 \right) = 0$$

Здесь использованы обозначения

$$P_e = \frac{t_{\tau}}{t_D}, \quad S_t = \frac{t_D}{t_c}, \quad \theta = \frac{T_x}{T_0}, \quad \omega_1 = \frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha},$$

$$\omega_i = \frac{\alpha_i \rho_{i0}}{\alpha}, \quad \epsilon_i = \frac{\rho_{i0}}{\rho_1} \quad (i = 2, 3), \quad (4.4)$$

$$F_g = \frac{\rho_1 g L}{P_c^*}, \quad F = \frac{Y_0 J_0}{\alpha T_x}$$

Безразмерные параметры  $P_e$  (число Пекле) и  $S_t$  характеризуют соотношения скоростей процессов переноса различной физической природы. Параметр  $F_g$  характеризует соотношение

между капиллярными и гравитационными силами, а параметр  $F$  - относительный вклад работы капиллярных сил в изменение температуры жидкости за счет ее всестороннего сжатия или расширения (обычно параметр  $F$  очень мал).

Преобразуем систему уравнений (4.3) к виду, удобному для численных расчетов.

Имеем

$$v_1 = \bar{P}_c f_1 (\gamma J' s \frac{\partial S}{\partial x} + \gamma'_{\tau} J \frac{\partial T}{\partial x} + J \frac{\partial \gamma}{\partial x}), \quad \bar{P}_c = \frac{\gamma_0 T_0}{P_c^*}$$

$$c_2 = P_2, \quad c_3 = 1 - P_2.$$

$$v_2 = \frac{\theta}{P_2} P_2 u - \frac{\partial P_2}{\partial x},$$

$$v_3 = \frac{\theta}{P_2} (1 - P_2) u + \frac{\partial P_2}{\partial x},$$

$$p_i = \frac{P_i}{T}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial T} = -\frac{p_i}{T}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{1}{T},$$

$$J' s = \frac{\partial J}{\partial S}, \quad \gamma'_{\tau} = \frac{\partial \gamma}{\partial T}.$$

Первые два уравнения системы (4.3) принимают вид

$$A \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B \frac{\partial Z}{\partial x} + D u + E) \quad (4.5)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} T \\ S \\ P_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = -\frac{m(1-S)\rho_2}{T}, \quad A_{12} = m\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \rho_2\right), \quad A_{13} = \frac{m(1-S)}{T}$$

$$A_{21} = 1 + m\omega_1 S + m(1-S)(\omega_2 \rho_2 h_2'_{\tau} - \frac{\omega_2 \rho_2 h_2}{T}),$$

$$A_{22} = m[\omega_1 h_1 + F\gamma(J + SJ's) - \omega_2 \rho_2 h_2 - \omega_3 \rho_3 h_3],$$

$$A_{23} = m(1-S)(\omega_2 h_2 - \omega_3 h_3) / T,$$

$$B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{S_t}{\epsilon_2} f_1 \bar{P}_c \gamma J' s, \quad B_{13} = \rho_2,$$

$$B_{21} = \frac{1}{P_2}, \quad B_{22} = -S_t \omega_1 \bar{P}_c \gamma f_1 J' s,$$

$$B_{23} = \omega_2 \rho_2 h_2 - \omega_3 \rho_3 h_3,$$

$$D_1 = -\frac{\theta}{P_2} \rho_2 c_2,$$

$$D_2 = -\frac{\theta}{P_2} (\omega_2 c_2 \rho_2 h_2 + \omega_3 c_3 \rho_3 h_3)$$

$$E_1 = -\frac{S_t}{\epsilon_2} f_1 (\bar{P}_c \frac{\partial \gamma}{\partial x} J + Fg)$$

$$E_2 = -S_t \omega_1 f_1 h_1 (\bar{P}_c \frac{\partial \gamma}{\partial x} J + Fg)$$

а третье уравнение приводится к форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (P) + \frac{\partial}{\partial x} (B_{12} \frac{\partial S}{\partial x} - \alpha u + E_1) = 0 \quad (4.6)$$

$$P = \frac{m(1-S)}{T} + \frac{mS}{\epsilon_2}, \quad \alpha = \frac{\theta}{P_2} \frac{1}{T}$$



Во влажной зоне ( $S > 0$ ) независимыми неизвестными являются  $T$ ,  $S$  и  $u$ , при этом  $P_2 = P_2^*(S, T)$

$$\frac{\partial P_2^*}{\partial y} = P_{2^*T} \frac{\partial T}{\partial y} + P_{2^*S} \frac{\partial S}{\partial y} \quad (y = x, t) \quad (4.7)$$

В сухой зоне ( $S = 0$ ) система (4.3) сводится к трем уравнениям относительно  $T$ ,  $P_2$  и  $u$ .

4.2. Рассмотрим теперь систему уравнений (II). Как и выше, ограничимся одномерным случаем, жидкую фазу будем считать несжимаемой, а при учете гравитационных эффектов будем пренебрегать переносом газовой фазы под действием силы тяжести.

Переход к безразмерным переменным осуществляется так же, как в п.4.1. При этом дополнительно вводится безразмерное давление в газовой фазе  $p = \bar{P} p'$  и следующие характерные величины:

$$t_F = \frac{L^2 M_2}{k \bar{P}}, \quad St_1 = \frac{t_D}{t_F}, \quad F_P = \frac{\bar{P}}{\rho T_x}, \quad v = \frac{\bar{P}}{P_c^*} \quad (4.8)$$

Здесь  $t_F$  - характерное время фильтрации для газовой фазы,  $\bar{P}$  - характерное давление в газовой фазе; параметр  $St_1$  характеризует соотношение скоростей диффузии и фильтрации для газовой фазы, а параметр  $F_P$  - относительное изменение температуры жидкости за счет изменения давления в газовой фазе на величину  $\bar{P}$ .

Безразмерные парциальные давления пара и воздуха определены соотношениями

$$P_i = \bar{P} p_i' \quad (i = 2, 3)$$

Уравнения движения и неразрывности в безразмерных переменных принимают вид (штрихи при безразмерных переменных опущены)

$$\begin{aligned} v_1 &= -f_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} - F_g \right) \\ v_2 &= -St_1 f_2 \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial x} \\ v_3 &= -St_1 f_2 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [T + ms \omega_1 h_1 + m(1-s)(\omega_2 \rho_2 h_2 + \omega_3 \rho_3 h_3) - m F_P P + m F_S Y J] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{P_2} \frac{\partial T}{\partial x} + St_1 \omega_1 h_1 v_1 + \omega_2 \rho_2 h_2 v_2 + \omega_3 \rho_3 h_3 v_3 \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [ms + m \epsilon_2 (1-s) \rho_2] + \frac{\partial}{\partial x} (St_1 v_1 + \epsilon_2 \rho_2 v_2) = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [m(1-s) \rho_3] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_3 v_3) = 0$$

Исключая лишние переменные, получаем систему трех уравнений относительно  $T$ ,  $P$ ,  $S$  и  $P_2$

$$A \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B \frac{\partial Z}{\partial x} + E) \quad (4.11)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} T \\ S \\ P_2 \\ P \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = -\frac{m(1-S)\rho_2}{T}, \quad A_{12} = m\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \rho_2\right),$$

$$A_{13} = \frac{m(1-S)}{T}, \quad A_{14} = 0,$$

$$A_{21} = -\frac{m(1-S)\rho_3}{T}, \quad A_{22} = -\rho_3 m,$$

$$A_{23} = -\frac{m(1-S)}{T}, \quad A_{24} = \frac{m(1-S)}{T},$$

$$A_{31} = 1 + mS\omega_1 + m(1-S)\omega_2\rho_2 h_2 \left(\frac{h_2 \pi}{h_2} - \frac{1}{T}\right),$$

$$A_{32} = m[\omega_1 h_1 + F\gamma(J + SJ's) - \omega_2\rho_2 h_2 - \omega_3\rho_3 h_3],$$

$$A_{33} = m(1-S)\left(\frac{\omega_2 h_2}{T} - \omega_3\right), \quad A_{34} = m[(1-S)\omega_3 - Fp],$$

$$B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{S_t}{\epsilon_2} b_4, \quad B_{13} = b_2 \rho_2, \quad B_{14} = \frac{S_t}{\epsilon_2} a_1 + \rho_2 a_2,$$

$$B_{21} = 0, \quad B_{22} = 0, \quad B_{23} = -b_2 \rho_3, \quad B_{24} = a_3 \rho_3,$$

$$B_{31} = 1/P_2, \quad B_{32} = -S_t \omega_1 b_1 h_1,$$

$$B_{33} = b_2 (\omega_2 \rho_2 h_2 - \omega_3 \rho_3 h_3),$$

$$B_{34} = S_t \omega_1 a_1 h_1 + \omega_2 a_2 \rho_2 h_2 + \omega_3 a_3 \rho_3 h_3,$$

$$E_1 = -\frac{S_t}{\epsilon_2} F g_1, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = -c_1 S_t \omega_1 h_1.$$

где  $a_1 = \nu f_1$ ,  $a_2 = S_t f_2 - P_2/P^2$ ,  $a_3 = S_t f_2 + P_2/P^2$ .

$$b_1 = \bar{P}_c f_1 \gamma J's, \quad b_2 = 1/P, \quad F g_1 = F g f_1.$$

Так же как и в случае системы (II), уравнения (4.II) замыкаются условием (2.8), задающим связь между  $P_2$ ,  $S$  и  $T$ .

### § 5. Постановка основных задач

Рассмотрим задачу тепло-массопереноса в пористом слое ( $0 \leq x \leq 1$ ) для системы (II), то есть при постоянстве давления в газовой фазе  $p = 1$ . Одну из поверхностей слоя, скажем  $x = 1$ , будем считать непроницаемой, а другую  $x = 0$  - открытой. В начальный момент времени  $t = 0$  известны распределения водонасыщенности, температуры и парциального давления пара (или воздуха) по толщине слоя

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad P_2(x, 0) = P_{20}(x) \quad (5.I)$$

Заметим сразу, что функции  $S_0(x)$  и  $P_{20}(x)$  не могут быть заданы произвольно, а должны быть согласованы с условиями (2.8). Начальное условие для расхода суммарного потока газовой фазы  $u$  не требуется, так как производная  $\partial u / \partial t$  не входит в уравнения. Далее, как правило, будем считать, что условия (5.I) отвечают некоторому стационарному состоянию, то есть  $T_0(x) = \text{const}$ ,  $P_{20}(x) = \text{const}$  и либо  $S_0(x) = \text{const}$ , либо  $S_0(x) \leq S_*$ , где  $S_*$  - насыщенность, при которой водная фаза становится несвязной и фазовая проницаемость  $f_1$  обращается в нуль (условие капиллярного равновесия).

Распределение водонасыщенности, кроме того, должно удовлетворять условию  $S_0(x) \leq S^*$ , где  $S^*$  - насыщенность, при которой газовая фаза зацементируется и становится неподвижной (несвязной), так как в противном случае давление в газовой фазе нельзя будет считать постоянным.

Требуется определить изменение во времени температуры, влагосодержания и фазового состава влаги в материале слоя при изменении на его поверхностях температуры и влажности воздуха.

Рассмотрим последовательно различные типы граничных условий, которые могут быть заданы на открытой и закрытой поверхностях слоя. (Обе поверхности не могут быть непроницаемыми одновременно, так как тогда давление в газовой фазе будет переменным).

Система уравнений (II) имеет первый порядок по  $u$ , поэтому граничное условие для  $u(x, t)$  задается лишь на одной изолированной поверхности слоя и имеет вид

$$u(1, t) = 0.$$

Будем считать, что на проницаемой поверхности слоя задано значение температуры

$$T(0, t) = T_1(t), \quad (5.2)$$

а на непроницаемой - граничное условие для температуры может быть двух типов: либо задается температура

$$T(1, t) = T_2(t) \quad (5.3)$$

либо поверхность  $x = 1$  считается теплоизолированной и тогда

$$\frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

Вид еще одного граничного условия, для совокупности переменных  $(S, P_2)$ , зависит от того, к какой зоне, влажной или сухой, относится рассматриваемая поверхность материала. Если

$S(0, t) = S(1, t) = 0$  (граница слоя находится в сухой зоне), то на проницаемой поверхности задаем давление пара

$$P_2(0, t) = P_{21}(t) \quad (5.5)$$

а на непроницаемой - условие отсутствия потока пара

$$\frac{\partial P_2(1, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

Если граница относится к влажной зоне, то независимой переменной является не давление пара  $P_2$ , а насыщенность  $S$ . В этом случае, вообще говоря, необходимо рассматривать внешнюю задачу об испарении (конденсации) влаги с поверхности материала при задании на некотором удалении от нее значений температуры и влажности пара, а на поверхности слоя требовать непрерывности температуры, давлений и потоков компонентов. Однако, чтобы избежать дополнительных усложнений задачи, ниже используется следующий приближенный подход, который в ряде практически важных случаев оказывается оправданным. Вместо внешнего давления пара задается его диффузионный поток с поверхности материала

$$\bar{v}_2 = f(P_2^i, P_{2\infty}, S^i, u^i) \quad (5.7)$$

Здесь  $P_{2\infty}$  - внешнее парциальное давление пара; индексом  $i$  обозначены граничные значения переменных  $P_2 = P_2^i(S, T)$ ,  $S$  и  $u$ . Функция  $f$  определяется либо экспериментально, либо как стационарное решение внешней диффузионной задачи, причем  $f = 0$  при  $P_2^i = P_{2\infty}$ .

Для того чтобы удовлетворить условию

$$-D \frac{\partial C_2}{\partial x} = \bar{v}_2 \quad (5.8)$$

можно воспользоваться приемом введения фиктивной среды. А именно реальный пористый слой дополняется фиктивным слоем толщины  $\Delta L$ , в котором температура и насыщенность считаются постоянными, равными их граничным значениям, а давление пара - распределенным по линейному закону.

Например, для границы  $x = 0$  будем иметь

$$P_2 = P_2^{i-1} + \frac{P_2^i - P_2^{i-1}}{\Delta L} (x - \Delta L), \quad (5.9)$$

а для границы  $x = 1$

$$P_2 = P_2^i + \frac{P_2^{i+1} - P_2^i}{\Delta L} (x - 1) \quad (5.10)$$

где  $P_2^{i-1}$  и  $P_2^{i+1}$  - значения  $P_2$  на внешних поверхностях фиктивного слоя, соответственно, при  $x = 0$  и  $x = 1$ , которые выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие (5.8).

Если пренебречь испарением (конденсацией) с поверхности материала, то  $\bar{V}_2 = 0$  и, следовательно, величины  $P_2^{i-1}$  и  $P_2^{i+1}$  должны совпадать с граничными значениями  $P_2^i$  на соответствующих поверхностях рассматриваемого пористого слоя. Это, очевидно, справедливо в тех случаях, когда либо поверхность слоя непроницаема, либо поток  $u$  достаточно велик и направлен наружу из пористой среды (при этом влажность воздуха на поверхности определяется самим внутренним решением и не зависит от внешних условий).

Таким образом, граничные условия для "составной" переменной ( $S, P_2$ ) должны согласовываться с решением и могут изменяться со временем даже в том случае, когда наружная температура и влажность воздуха остаются постоянными.

Аналогичным образом ставятся начальные и граничные условия для системы уравнений (I). В этом случае дополнительно задается начальное условие для давления в газовой фазе  $P$  и вместо одного граничного условия для  $u$  задаются два граничных условия для  $P$

$$P(x, 0) = P_0(x), P(0, t) = P_{01}(t), P(1, t) = P_{02}(t) \quad (5.II)$$

Если поверхность слоя  $x = 1$  непроницаема, то последнее соотношение заменяется на

$$\frac{\partial P(1, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.I2)$$

### § 6. Численный метод

6.I. Для решения задач тепло-влажносто-переноса ниже используется метод сквозного счета. Рассмотрим сначала методику его реализации в случае постоянства давления в газовой фазе. Систему уравнений (4.5), записанную в виде (4.4), будем аппроксимировать неявной конечно-разностной схемой:

$$A_i^{n+1} \frac{Z_i^{n+1} - Z_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [B_{i+1/2}^{n+1} (Z_{i+1}^{n+1} - Z_i^{n+1}) - B_{i-1/2}^{n+1} (Z_i^{n+1} - Z_{i-1}^{n+1}) + h(D_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - D_i^{n+1} u_i^{n+1}) + h(E_{i+1}^{n+1} - E_i^{n+1})] \quad (6.1)$$

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\tau} + \frac{1}{h^2} [B_{i+1/2}^{n+1} (S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}) - B_{i-1/2}^{n+1} (S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}) - h(Q_{i+j}^{n+1} u_{i+j}^{n+1} - Q_{i+j-1}^{n+1} u_{i+j-1}^{n+1}) + h(E_{1i+1}^{n+1} - E_{1i}^{n+1})] = 0$$

$$j=0 \quad \text{при } u_i^{n+1} > 0 \quad \text{и } j=1 \quad \text{при } u_i^{n+1} < 0$$

где нижний индекс  $i$  соответствует значению пространственной переменной  $x = (i-1)h$ , ( $i = 2, N$ ), а верхний  $n$  - значению времени  $t = n\tau$ .

При аппроксимации члена, содержащего  $u$ , в последнем уравнении (4.4) учитывается направление потока газовой фазы. Это обстоятельство оказывается принципиальным при проведении расчетов и связано с гиперболичностью уравнения (4.4) относительно переменной  $u$ .

Сеточная область  $E = \{x = (i-1)h, i = 1, N\}$  в каждый момент времени естественным образом разбивается на две подобласти:

$$E_P^n = \{x : s = 0\} \quad \text{и} \quad E_S^n = \{x : s > 0\}$$

независимым неизвестным в которых являются соответственно  $T, P_2, u$  и  $T, S, u$ . В области  $E_S^n : P_2 = P_2^*(s, T)$ .

Систему нелинейных алгебраических уравнений (6.1) на каждом временном шаге будем решать итерационным методом, заменяя значения коэффициентов уравнений на каждой итерации их значениями на предыдущей итерации

$$A_i^v \frac{z_i^{v+1} - z_i^v}{\tau} = \frac{1}{h^2} [B_{i+1/2}^v (z_{i+1}^{v+1} - z_i^{v+1}) - B_{i-1/2}^v (z_i^{v+1} - z_{i-1}^{v+1}) + h (D_{i+1}^v u_{i+1}^{v+1} - D_i^v u_i^{v+1}) + h (E_{i+1}^v - E_i^v)]$$

$$\frac{P_i^{v+1} - P_i^v}{\tau} + \frac{1}{h^2} [B_{i+1/2}^{v+1} (S_{i+1}^{v+1} - S_i^{v+1}) - B_{i-1/2}^{v+1} (S_i^{v+1} - S_{i-1}^{v+1}) -$$

$$h (Q_{i+j}^{v+1} u_{i+j}^{v+1} - Q_{i+j-1}^{v+1} u_{i+j-1}^{v+1}) + h (E_{i+1}^{v+1} - E_i^{v+1})] = 0.$$

$$j = (1 - \text{sgn } u_i^{v+1}) / 2, \quad A_i^0 = A_i^v, \quad B_{i+1/2}^0 = B_{i+1/2}^v$$

$$D_i^0 = D_i^v, \quad E_i^0 = E_i^v$$

где  $n+1$  - номер временного слоя, на котором ищется решение;  $v+1$  - номер итерации.

На каждой итерации систему линейных уравнений (6.2), дополненную граничными условиями, будем решать методом скалярной прогонки, используя расщепление по физическим переменным.

Остановимся подробно на последовательности действий. Пусть на  $n$ -м временном слое известны значения  $S^n, P_2^n, T^n$

$u^n$  и на  $(n+1)$ -м слое после  $v$ -й итерации  $S^v, P_2^v, T^v, u^v$ , а подлежат отысканию  $T^{v+1}; (S^{v+1}, P_2^{v+1}); u^{v+1}$ .

Для нахождения  $T^{v+1}$  воспользуемся вторым уравнением системы (4.5)

$$A_{21}^v \frac{\partial T}{\partial t} + A_{22}^v \frac{\partial S}{\partial t} + A_{23}^v \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B_{21}^v \frac{\partial T}{\partial x} + B_{22}^v \frac{\partial S}{\partial x} + B_{23}^v \frac{\partial P_2}{\partial x}) + D_2^v u + E_2^v$$

коэффициенты которого вычислены в узлах сетки по значениям  $T, S, P_2$  и  $u$  на  $v$ -й итерации.

Все производные от  $T, S, P_2$  и  $u$  в области  $E_P$  заменим конечно-разностными отношениями по тем же правилам, что и в (6.1), взяв величины  $S, P_2, u$  с предыдущей итерации. В области  $E_S$  производные от  $P_2$  согласно (2.9) должны быть заменены выражениями (4.7), в которых коэффициенты и производные от  $S, T$  вычисляются по вышеописанному правилу.

В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно значений температуры  $\{T_i^{v+1}\}$

$$A_i^v T_{i-1}^{v+1} - C_i^v T_i^{v+1} + B_i^v T_{i+1}^{v+1} + F_i^v = 0 \quad (6.3)$$

где  $i = 3, N-1$

$$A_i^v = \frac{W_{i-1/2}^v}{h}, \quad B_i^v = \frac{W_{i+1/2}^v}{h},$$

$$C_i^v = \frac{1}{h} [W_{i-1/2}^v + W_{i+1/2}^v] + \frac{V_i^v h}{\tau},$$

$$F_i^v = \Omega_i^v + \frac{V_i^v h}{\tau} T_i^n$$

Величины  $V, W, \Omega$  определяются следующим образом: для  $x$  из областей  $E_P$  и  $E_S$ , соответственно,

$$V = A_{21}, \quad W = B_{21}, \quad \Omega = \frac{\partial}{\partial x} (B_{23} \frac{\partial P_2}{\partial x} + D_2 u + E_2) - A_{23} \frac{\partial P_2}{\partial t}$$

$$V = A_{21} + P_{2\tau}^* A_{23}, \quad W = B_{21} + B_{23} P_{2s}^*,$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (B_{22} + P_{2s}^* B_{23}) \frac{\partial S}{\partial x} + D_2 u + E_2 \right] - (A_{22} + P_{2s}^* A_{23}) \frac{\partial S}{\partial x}$$

Решение системы (6.3) может быть найдено с помощью метода прогонки [18].

Для нахождения "составной" переменной ( $S^{v+1}, P_2^{v+1}$ ) воспользуемся первым уравнением (4.5)

$$A_{11}^v \frac{\partial T}{\partial t} + A_{12}^v \frac{\partial S}{\partial t} + A_{13}^v \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{11}^v \frac{\partial T}{\partial x} + B_{12}^v \frac{\partial S}{\partial x} + B_{13}^v \frac{\partial P_2}{\partial x} + D_1 u + E_1^v \right) \quad (6.4)$$

Так как в сухой зоне независимыми переменными являются  $P_{2i}^{v+1}$ , а во влажной  $S_i^{v+1}$ , то во всей области можно ввести одну неизвестную сеточную функцию, определенную следующим образом:

$$Y_i = \begin{cases} P_{2i}^{v+1} & \text{при } x \in E_p^v \\ S_i^{v+1} & \text{при } x \in E_s^v \end{cases} \quad (6.5)$$

По известным  $Y_i$  значения  $S_i^{v+1}, P_{2i}^{v+1}$  восстанавливаются по формулам

$$S_{i+1}^{v+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in E_p^v \\ Y_i & \text{при } x \in E_s^v \end{cases} \quad (6.6)$$

$$P_{2i}^{v+1} = \begin{cases} Y_i & \text{при } x \in E_p^v \\ P_2^*(S_i^{v+1}, T_i^{v+1}) & \text{при } x \in E_s^v \end{cases}$$

Граничные условия для функции  $Y$  будут зависеть от того, принадлежит ли граничная точка ( $i = 2$  или  $i = N$ ) области  $E_p^v$  или  $E_s^v$ . В первом случае, очевидно, будем иметь

$$Y_2 = P_{21}(n\tau + \tau), \quad Y_N = P_{2N-1}(n\tau + \tau)$$

Если же на границе  $S^v > 0$ , то можно воспользоваться фиктивными узлами  $i = 1$  и  $i = N+1$ . Будем пренебрегать испарением жидкости с поверхности, тогда, следуя § 5,  $Y_1$  и  $Y_{N+1}$  вычисляются следующим образом:

$$Y_1 = P_{22}^{v+1} = P_2^*(S_2^{v+1}, T_2^{v+1})$$

$$Y_{N+1} = P_{2N}^{v+1} = P_2^*(S_N^{v+1}, T_N^{v+1})$$

Перепишем уравнение (6.4) в конечно-разностной форме

$$\bar{A}_i^v S_{i-1}^{v+1} - \bar{C}_i^v S_i^{v+1} + \bar{B}_i^v S_{i+1}^{v+1} + \bar{A}_i^v P_{2i-1}^{v+1} - \bar{C}_i^v P_{2i}^{v+1} + \bar{B}_i^v P_{2i+1}^{v+1} + \bar{F}_i^v = 0 \quad (6.7)$$

где

$$\bar{A}_i^v = \frac{B_{12i-1/2}^v}{h}, \quad \bar{B}_i^v = \frac{B_{12i+1/2}^v}{h},$$

$$\bar{C}_i^v = \frac{B_{12i-1/2}^v + B_{12i+1/2}^v}{h} + A_{12i}^v h / \tau,$$

$$\bar{A}_i^v = \frac{B_{13i-1/2}^v}{h}, \quad \bar{B}_i^v = \frac{B_{13i+1/2}^v}{h},$$

$$\bar{C}_i^v = \frac{B_{13i+1/2}^v + B_{13i-1/2}^v}{h} + A_{13i}^v h / \tau,$$

$$\bar{F}_i^v = \frac{h}{\tau} [A_{13i}^v P_{2i}^n + A_{12i}^v S_i^n - A_{11i}^v (T_i^{v+1} - T_i^n)] +$$

$$D_{1i+1}^v u_{i+1}^v - D_{1i}^v u_i^v + E_{1i+1}^v - E_{1i}^v$$



Уравнению (6.7) будет соответствовать уравнение

$$A_i^v Y_{i-1} - C_i^v Y_i + B_i^v Y_{i+1} + F_i^v = 0 \quad (6.8)$$

коэффициенты которого определяются по следующему правилу:

$$A_i^v = \begin{cases} \bar{A}_i^v & x_{i-1} \in E_p^v \\ \bar{A}_i^v & x_{i-1} \in E_s^v \end{cases}, \quad B_i^v = \begin{cases} \bar{B}_i^v & x_{i+1} \in E_p^v \\ \bar{B}_i^v & x_{i+1} \in E_s^v \end{cases}$$

$$C_i^v = \begin{cases} \bar{C}_i^v & x_i \in E_p^v \\ \bar{C}_i^v & x_i \in E_s^v \end{cases}$$

$$F_i^v = \bar{F}_i^v + \begin{cases} 0 & x_{i-1} \in E_p^v \\ \bar{A}_i^v P_{2i-1}^{*v+1} & x_{i-1} \in E_s^v \end{cases} - \begin{cases} 0 & x_i \in E_p^v \\ \bar{C}_i^v P_{2i}^{*v+1} & x_i \in E_s^v \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 0 & x_{i+1} \in E_p^v \\ \bar{B}_i^v P_{2i+1}^{*v+1} & x_{i+1} \in E_s^v \end{cases} \quad i = 2, N$$

При этом фиктивные узлы относятся к сухой зоне  $E_p^v$ .

Механизм отслеживания границы раздела двух зон заключается в следующем:

после каждой итерации проверяется условие  $S_i^{v+1} \leq 0$ . Если оно выполняется, то соответствующая точка причисляется к сухой зоне, если  $P_{2i}^{v+1} > P_{2i}^*(T_i^{v+1}, S_i^{v+1})$  - к влажной зоне.

Для определения  $U_i^{v+1}$  найденные значения  $T^{v+1}, P_2^{v+1}, S^{v+1}$  подставляются в последнее уравнение (6.2)

$$U_{i+j-1}^{v+1} = \frac{1}{Q_{i+j-1}^{v+1}} (Q_{i+j}^{v+1} U_{i+j}^{v+1} - \bar{F}_i^{v+1}), \quad j = (1 - \text{sgn } U_i^{v+1}) / 2$$

$$\bar{F}_i^{v+1} = \frac{h}{\tau} (P_i^{v+1} - P_i^n) + \frac{1}{h} [B_{12i+1/2}^{v+1} (S_{i+1}^{v+1} - S_i^{v+1}) - B_{12i-1/2}^{v+1} (S_i^{v+1} - S_{i-1}^{v+1}) + E_{1i+1}^{v+1} - E_{1i}^{v+1}]$$

6.2. Рассмотрим теперь более общий случай, когда давление в газовой фазе переменное.

Выпишем систему (4.10) в конечно-разностной форме

$$A_i^v \frac{Z_i^{v+1} - Z_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [B_{i+1/2}^v (Z_{i+1}^{v+1} - Z_i^{v+1}) - B_{i-1/2}^v (Z_i^{v+1} - Z_{i-1}^{v+1}) + h(E_{i+1}^v - E_i^v)] \quad (6.9)$$

Для определения температуры  $T$  воспользуемся третьим уравнением (4.11)

$$A_{31} \frac{\partial T}{\partial t} + A_{32} \frac{\partial S}{\partial t} + A_{33} \frac{\partial P_2}{\partial t} + A_{34} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + B_{32} \frac{\partial S}{\partial x} + B_{33} \frac{\partial P_2}{\partial x} + B_{34} \frac{\partial P}{\partial x} + E_3)$$

или

$$\sqrt{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x} (W \frac{\partial T}{\partial x} + \Omega)$$

Для  $x \in E_p$ :  $\sqrt{v} = A_{31}, W = B_{31}$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial x} (B_{33} \frac{\partial P_2}{\partial x} + B_{34} \frac{\partial P}{\partial x} + E_3) - A_{33} \frac{\partial P_2}{\partial t} - A_{34} \frac{\partial P}{\partial t}$$

а при  $x \in E_s$ :  $\sqrt{v} = A_{31} + P_{2,T}^* A_{33}, W = B_{31} + P_{2,T}^* B_{33}$ .

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial x} [(B_{32} + P_{2,S}^* B_{33}) \frac{\partial S}{\partial x} + B_{34} \frac{\partial P}{\partial x} + E_3] - (A_{32} + P_{2,S}^* A_{33}) \frac{\partial S}{\partial t} - A_{34} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Все производные от  $P, T, S, P_2$  аппроксимируем по вышеописанному правилу. После несложных преобразований получим следующую систему алгебраических уравнений для нахождения  $\{T_i^{v+1}\}$

$$A_i^v T_{i-1}^{v+1} - C_i^v T_i^{v+1} + B_i^v T_{i+1}^{v+1} + F_i^v = 0 \quad (6.10)$$

где

$$A_i^v = \frac{W_{i-1/2}^v}{h}, \quad B_i^v = \frac{W_{i+1/2}^v}{h},$$

$$C_i^v = \frac{1}{h} (W_{i-1/2}^v + W_{i+1/2}^v) + \frac{V_i^v h}{\tau},$$

$$F_i^v = \Omega_i^v + \frac{V_i^v T_i^n h}{\tau}$$

Первое уравнение (4.II) используется для определения значений  $(S, P_2)$

$$A_{11} \frac{\partial T}{\partial t} + A_{12} \frac{\partial S}{\partial t} + A_{13} \frac{\partial P_2}{\partial t} + A_{14} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial S}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial P_2}{\partial x} + B_{14} \frac{\partial P}{\partial x} + E_1) \quad (6.II)$$

Вводя переменную  $\Upsilon$  таким же образом, как в предыдущем пункте, получим следующую систему алгебраических уравнений для определения значений  $\Upsilon$ :

$$A_i^v \Upsilon_{i-1} - C_i^v \Upsilon_i + B_i^v \Upsilon_{i+1} + F_i^v = 0, \quad i = 2, N. \quad (6.I2)$$

$$A_i^v = \begin{cases} \bar{A}_i^v & x_{i-1} \in E_s^v \\ \underline{A}_i^v & x_{i-1} \in E_p^v \end{cases}, \quad B_i^v = \begin{cases} \bar{B}_i^v & x_{i+1} \in E_s^v \\ \underline{B}_i^v & x_{i+1} \in E_p^v \end{cases}$$

$$C_i^v = \begin{cases} \bar{C}_i^v & x_i \in E_s^v \\ \underline{C}_i^v & x_i \in E_p^v \end{cases}$$

$$F_i^v = \bar{F}_i^v + \begin{cases} \bar{A}_i^v P_{2i-1}^{v+1} & x_{i-1} \in E_s^v \\ 0 & x_{i-1} \in E_p^v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{C}_i^v P_{2i}^{v+1} & x_i \in E_s^v \\ 0 & x_i \in E_p^v \end{cases} + \begin{cases} \bar{B}_i^v & x_{i+1} \in E_s^v \\ 0 & x_{i+1} \in E_p^v \end{cases}$$

где

$$\bar{A}_i^v = \frac{B_{12i-1/2}^v}{h}, \quad \bar{B}_i^v = \frac{B_{12i+1/2}^v}{h},$$

$$\bar{C}_i^v = \frac{B_{12i+1/2}^v + B_{12i-1/2}^v}{h} + \frac{A_{12i}^v h}{\tau},$$

$$\underline{A}_i^v = \frac{B_{13i-1/2}^v}{h}, \quad \underline{B}_i^v = \frac{B_{13i+1/2}^v}{h},$$

$$\underline{C}_i^v = \frac{1}{h} (B_{13i-1/2}^v + B_{13i+1/2}^v) + A_{13i}^v h / \tau$$

$$\bar{F}_i^v = \frac{B_{14i+1/2}^v}{h} (P_{i+1}^v - P_i^v) - \frac{B_{14i-1/2}^v}{h} (P_i^v - P_{i-1}^v) + E_{1i+1}^v - E_{1i}^v + \frac{h}{\tau} [A_{13i}^v P_{2i}^n + A_{12i}^v S_i^n - A_{11i}^v (T_i^{v+1} - T_i^n)]$$

Вместо третьего уравнения в предыдущем пункте воспользуемся вторым уравнением (4.II) для определения значений  $p$ :

$$A_{21} \frac{\partial T}{\partial t} + A_{22} \frac{\partial S}{\partial t} + A_{23} \frac{\partial P_2}{\partial t} + A_{24} \frac{\partial P}{\partial t} = \quad (6.I3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (B_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial S}{\partial x} + B_{23} \frac{\partial P_2}{\partial x} + B_{24} \frac{\partial P}{\partial x} + E_2)$$

или

$$A_{24} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{24} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \omega \quad (6.14)$$

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{23} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) - A_{21} \frac{\partial T}{\partial t} - A_{23} \frac{\partial P_2}{\partial t}$$

В конечно-разностной форме уравнение (6.14) приобретает вид

$$A_{24i}^v \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\tau} = B_{24i+1/2}^v \frac{P_{i+1}^{j+1} - P_i^{j+1}}{h^2} - B_{24i-1/2}^v \frac{P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \omega_i^{j+1}$$

$\omega_i^{j+1}$  - конечно-разностная аппроксимация выражения  $\omega$ . В итоге получим следующую систему алгебраических уравнений для определения  $\{P_i^{j+1}\}$ ,  $i = 2, N-1$

$$A_i^v P_{i-1}^{j+1} - C_i^v P_i^{j+1} + B_i^v P_{i+1}^{j+1} + F_i^v = 0$$

$$A_i^v = \frac{B_{24i-1/2}^v}{h^2}, \quad B_i^v = \frac{B_{24i+1/2}^v}{h^2},$$

$$C_i^v = \frac{1}{h^2} (B_{24i+1/2}^v + B_{24i-1/2}^v) + \frac{A_{24i}^v}{\tau}$$

$$F_i^v = \omega_i^{j+1} + \frac{A_{21i}^v P_i^j}{\tau}$$

### § 7. Исходные данные

Системы уравнений (I) и (II) содержат ряд материальных функций, которые считаются известными. Ниже приводятся формулы для них, использованные в расчетах.

Давление насыщенного пара над плоской поверхностью жидкости может быть найдено, в простейшем варианте, из уравнения Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{\lambda}{T(\nu'' - \nu')} \quad (7.1)$$

где  $\lambda$  - скрытая теплота парообразования,  $\nu'$  и  $\nu''$  - удельные объемы соответственно жидкости и пара, то есть  $\nu' = 1/\rho_1$  и  $\nu'' = 1/\rho_2$ . При небольших температурах величиной  $\nu'$  можно пренебречь по сравнению с  $\nu''$ , а для вычисления  $\nu''$  воспользоваться уравнением Менделеева-Клапейрона. Тогда

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{\lambda P_s}{R_n T^2} \quad (7.2)$$

где  $R_n = R/\mu$ ;  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $\mu = 18$  - молекулярный вес воды.

Считая далее  $\lambda$  линейной функцией температуры

$$\lambda = A + B T \quad (7.3)$$

и интегрируя (7.2) с учетом (7.3), получим следующее приближенное выражение для  $P_s$

$$P_s(T) = P_0 \exp \left[ \frac{B}{R_n} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{A}{R_n} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (7.4)$$

где  $P_0$  и  $T_0$  - давление и температура, отвечающие некоторому фиксированному состоянию системы.

Для воды и ее пара имеем [2]

$$T_0 = 293,15 \text{ }^\circ\text{K}, \quad P_0 = 0,02383 \text{ ат.} \quad (7.5)$$

$$A = 750,264 \text{ ккал/кг} = 3,1412 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

$$B = -0,56 \text{ ккал/кг}^\circ\text{C} = -2,3446 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}^\circ\text{C}$$

На рис. I показаны кривые зависимости давления пара над плоской поверхностью и его производной от температуры. \* - значения давления пара по [19].

Давление пара над искривленной поверхностью жидкости находится по формуле (2.9).

Функция Леверетта задавалась в виде

$$J(s) = \pi(s - 0.2)^{-2}, \quad \pi = 0.6 \cdot 10^{-2} \quad (7.6)$$

Коэффициент поверхностного натяжения обычно принимается линейной функцией температуры

$$\sigma = \sigma_0 + \epsilon T, \quad \epsilon = \text{const} \quad (7.7)$$

однако для воды величина  $\epsilon$  мала, поэтому считалось, что  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ .

В расчетах использовались следующие относительные фазовые проницаемости:

$$f_1(s) = \begin{cases} (s - s_*)^{3.5} / 0.3^{3.5} & s_* \leq s \leq 1 \\ 0 & 0 \leq s \leq s_* \end{cases} \quad s_* = 0.2$$

$$f_2(s) = \begin{cases} 1 & s \leq s_* \\ \frac{s^* - s}{s^* - s_*} & s_* < s < s^* \\ 0 & s \geq s^* \end{cases} \quad s^* = 0.8 \quad (7.8)$$

зависимость  $f_i$  от температуры пренебрегалось.

Заметим, что, в силу специфического вида зависимости  $P_2^*(T)$ , вычисления по формуле (7.4) проводились с двойной точностью. В противном случае малые погрешности  $T$  приводят к большим погрешностям в  $P_2^*(T)$ .

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $L = 0.2$  м;  $D = 0.23 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с;  $P = 0.981 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>;  $m = 0.4$ ;  $\mu_1 = 0.1 \cdot 10^{-2}$  кг/м·с;  $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\chi = 0.8376 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>·°К;  $\chi_1 = 0.41868 \cdot 10^4$  Дж/кг·°К;  $\chi_3 = 0.1 \cdot 10^4$  Дж/кг·°К;  $T_0 = 293.15$  °К;  $\lambda = 0.628$  Дж/м·с·°К;  $\alpha_2 = 0.22 \cdot 10^{-2}$  кг/°К·Дж;  $\alpha_3 = 0.15 \cdot 10^{-2}$  кг/°К·Дж;  $K = 0.1 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup> (10 Дарси);  $\gamma_1 = 0.23446 \cdot 10^4$  Дж/кг·°К;

$$\rho_0 = 0.314 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}; \quad \sigma = 0.07275 \text{ н/м}; \quad T_1 = 363.15 \text{ }^\circ\text{К};$$

$$\mu_2 = 0.18 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}\cdot\text{с}.$$

### § 8. Методические расчеты

Проведенные расчеты, результаты которых приводятся ниже, преследовали, главным образом, следующие цели: отработку методики численного счета, изложенной в § 6, и определение характеристик точности и быстродействия программы при реализации ее на ЭВМ.

Методика расчета реализована в виде программ на языке ФОРТРАН-4 для ЕС ЭВМ. Каждая программа состоит из основной программы и восьми подпрограмм: подпрограмма вычисления матричных коэффициентов  $A, B, D, E$ ; трех подпрограмм вычисления прогоночных коэффициентов для температуры  $T$ , составной переменной  $(s, P_2)$  и суммарного потока  $u$  или давления в газовой фазе  $P$ , подпрограммы вычисления давления насыщенного пара и его производной по температуре, подпрограммы вычисления функции Леверетта и кривых фазовых проницаемостей и двух подпрограмм, реализующих метод прогонки в зависимости от граничных условий на закрытом конце. Порядок работы программы совпадает с последовательностью действий, описанной в § 6. После вычисления безразмерных комбинаций вычисляются все матричные коэффициенты, потом вычисляются последовательно значения  $T, (s, P_2), u$  (или  $P$ ). По найденным значениям переменных пересчитываются все коэффициенты, и итерации повторяются до тех пор, пока не достигается необходимая точность.

С целью проверки работоспособности программы и экономии машинного времени на стадии отладки все расчеты проводились на грубой сетке из 11 узлов. Точность результатов контролировалась путем сопоставления с известными аналитическими решениями. В табл. I приведено такое сопоставление для задачи теплопроводности с прогревом образца, решение которой получено методом разделения переменных. Далее проводились рас-

четы "чисто газовой" задачи, т.е. неизоэнтальной задачи теории диффузии газов. При этом выполнялась проверка сходимости итераций и отработывалась процедура выбора шага, о которой будет сказано ниже. Сходимость итерации этой задачи иллюстрируется данными, приведенными в табл.2. Видно, что для "чисто" газовой задачи достаточно только двух итераций. Задачи с фазовыми переходами условно разбивались на две группы - соответственно, при "неподвижной" ( $s \leq s_0$ ) и "подвижной" ( $s > s_0$ ) насыщенности. Все сложности этой задачи связаны с фазовыми переходами. В табл.3 приведены результаты проверки сходимости для случая неподвижной насыщенности. Значения переменных в табл.2,3 соответствуют их отклонениям от первоначального состояния.

Остановимся подробно на последних задачах. При наличии жидкости давления пара  $P_2$  вычисляется по формуле (2.9). Как видно из рис.1, малое изменение температуры  $T$  приводит к большому изменению значения давления  $P_2$ , поэтому при реализации задачи на ЭВМ значения  $P_2^*(T)$  требовалось вычислять с двойной точностью.

Если насыщенность в граничных точках отлична от нуля, вводятся фиктивные узлы  $x_1 = -h$  и  $x_{N+1} = 1+h$  для вычисления ( $s, P_2$ ). Эти точки относились к сухой зоне; они использовались только для задания граничных условий. Значения переменных в фиктивных узлах выбирались равными их значениям в соседних:  $T_{j \pm 1} = T_j$ ;  $s_{j \pm 1} = s_j$ ; где знак "-" берется при  $j = 2$  и знак "+" - при  $j = N$ . Значения давления пара  $P_2$  в фиктивных узлах задавались следующим образом. На "закрытом" конце  $P_{2N+1} = P_{2N}^*(s_N, T_N)$ . На "открытом" конце, если пренебречь испарением с поверхности (диффузионным потоком), то  $P_{21} = P_{22}^*(s_2, T_2)$ ; при учете испарения с поверхности выбор  $P_{21}$  производился из следующих соображений.

Пусть из решения внешней диффузионной задачи имеем  $v_2 = \alpha (P_{2\infty} - P_2^*(s_2, T_2))$ , где  $P_{2\infty}$  - давление пара на

бесконечности,  $\alpha$  - некоторый коэффициент. Тогда из (3.1) получим

$$-D \frac{\partial c_2}{\partial x} = v_2 \quad ; \quad -D \frac{P_{22}^* - P_{21}}{h} = v_2 \quad ; \quad P_{21} = P_{22}^* + \frac{h}{D} v_2$$

При проведении расчетов для задач с фазовыми переходами специально отработывалась методика отслеживания границ сухой и влажной зон. Для этого на каждой итерации проверялось условие  $P_2 \leq P_2^*(s, T)$  для точек, принадлежащих на предыдущем временном слое сухой зоне. Если оно выполнялось, то эти точки оставались в сухой зоне, если не выполнялось, то они относились к влажной зоне. В последнем случае полагалось

$$P_{2i} = P_{2i}^*(s_i, T_i)$$

$$s_i = \frac{P_{20}}{P_1} \frac{P_{2i} - P_{2i}^*}{T_i}$$

Для точек, принадлежащих влажной зоне, проверялось условие  $s_i \leq 0$ ; если оно выполнялось, то точка относилась к сухой зоне, если не выполнялось - к влажной зоне. В программе для удобства организации расчетов был введен массив, элементы которого принимали значения 0 в сухой зоне, 1 - во влажной и корректировались на каждой итерации.

В рассмотренных физических задачах выделяются три характерных процесса - теплоперенос, диффузионный массоперенос и капиллярная пропитка, которым соответствует три характерных времени:

$$t_T = \frac{L^2 \rho c}{\lambda} \quad , \quad t_D = \frac{L^2}{D} \quad , \quad t_c = \frac{L^2 \rho_1}{k P_c^*}$$

Для системы (I) кроме этих характерных времен возникает еще одно характерное время, отвечающее процессу фильтрации газовой фазы под действием перепада суммарного давления

$$t_F = \frac{L^2 M_2}{k P}$$



Если  $\bar{P} \sim 1$  атм.,  $P_c^* \sim 0,5$  атм., то  $t_T, t_D, t_c, t_F$  принимают значения порядка:  $5,3 \cdot 10^4, 1,7 \cdot 10^3, 10^2, 20$  с. При одновременной реализации этих процессов для выбора временного шага  $\tau$  следует ориентироваться на самый быстрый из них, то есть на наименьшее значение характерного времени. При проведении расчетов  $\tau$  принималось равным минимальному характерному времени, умноженному на 0,2.

Как уже отмечалось выше, в случае газовой задачи для сходимости численного счета на каждом шаге достаточно было двух итераций. При наличии фазового перехода — трех. Однако для надежности все расчеты проводились с пятью итерациями. Результаты расчетов показали, что на начальной стадии это является оправданным, но на следующих временных шагах требуемое число итераций уменьшается. Поэтому дополнительным резервом совершенствования программ является организация автоматического выбора числа итераций на каждом временном шаге. Очевидно, при выборе критерия сходимости можно следить лишь за наиболее сильно меняющимися переменными. В случае системы (II) такой переменной является  $u$ .

Результаты расчетов показывают, что для сетки из 50 узлов время, затрачиваемое на одну итерацию, составляет 0,7 с.

Для расчета процесса длительностью порядка одного теплового времени требуется 10 мин счета на ЭВМ.

При реализации методики расчета для систем (I), (II) на ЭВМ были проведены некоторые численные эксперименты. Оказалось, что попытка избежать дифференцирования  $P_2^*(S, T)$  во внешней зоне по  $S$  и  $T$  при вычислении температуры (путем перенесения этих членов в правую часть и использования их значений на предыдущей итерации) хотя и приводит к существенному упрощению логики программы, но увеличивает необходимое число итераций до 8 и потому является нецелесообразной.

Было установлено также, что исключение из первых двух уравнений системы (II) производной  $\partial u / \partial x$  не является оправданным, так как приводит к увеличению объема вычислений, но

не уменьшает числа итераций до сходимости результатов на каждом шаге.

Все приводимые ниже результаты расчетов, если это специально не оговаривается, получены на сетке из 51 узла.

### § 9. Примеры решенных задач

Ниже приводятся результаты, полученные при использовании модели (I), отвечающей постоянству давления в газовой фазе. Эта модель описывает процессы тепловлагопереноса в высокопроницаемых пористых средах.

На фиг.2 представлены результаты расчетов для термодиффузионной ("чисто газовой") задачи. Показаны распределения температуры  $T$ , давления пара  $P_2$  и суммарного потока  $u$  вдоль образца в два момента времени  $t_1 = 0,33, t_2 = 0,4$ . Первоначально образец, непроницаемый и теплоизолированный с одного из торцов, был насыщен "сухим" паром. Затем его открытый конец приведен в соприкосновение с влажным воздухом более высокой температуры. Повышение температуры на поверхности вызывает перераспределение пара и воздуха внутри образца. Газ расширяется и выходит наружу. При этом давление пара на поверхности материала поддерживается равным внешнему давлению. Влажность образца уменьшается в течение времени за счет диффузии и конвективного переноса. Интенсивность суммарного потока также падает со временем.

Динамика процесса сушки однородного влажного материала при наличии в нем жидкости показана на фиг.3. В начальный момент времени во влажной зоне, занимающей часть образца  $a \leq x \leq 1, a = 0,1$ , водонасыщенность равна предельной остаточной насыщенности  $S_0 = 0,2$ , при которой жидкая фаза неподвижна. С повышением температуры на открытом конце ( $x = 0$ ) температура в образце постепенно возрастает, а жидкость испаряется. Область испарения локализована в узком интервале, при численном счете ей соответствует лишь один



узел пространственной сетки, называемый далее фронтом испарения. На фронте испарения давление пара  $P_2$  максимально. Основная часть образовавшегося пара выходит наружу в смеси с воздухом; оставшая часть пара перебрасывается в направлении теплового потока и конденсируется в образце. Это явление объясняется наличием мощного диффузионного потока от фронта испарения внутрь образца. Приведенные кривые соответствуют моментам времени  $t_1 = 0,135$ ,  $t_2 = 0,81$ ,  $t_3 = 1,485$ .

Следующая серия расчетов была проведена для задачи о сушке влажного образца, равномерно заполненного жидкой влагой. Особый интерес при этом представляло исследование динамики сушки в зависимости от вида граничного условия на открытом конце образца, на котором повышалась температура. На фиг.4 приведены результаты расчетов при отсутствии испарения с поверхности (в граничном условии (5.8) полагалось  $P_{21} = P_{22}^v$ ). Начальная водонасыщенность  $S_0(x) = 0,1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , и жидкость неподвижна. При повышении температуры на открытом конце образца происходит испарение жидкости. Однако до тех пор пока вблизи открытого конца не возникла сухая зона, поток пара направлен внутрь образца. При этом вся испаряющаяся влага вместе с влагой, поступающей извне с потоком воздуха, конденсируется внутри тела. С появлением сухой зоны направление потока пара меняется. Он снова разделяется на фронте испарения. Характерно возникновение немонотонных распределений насыщенности в образце. Далее сухая зона углубляется внутрь образца, и процесс развивается так же, как в описанном выше случае. Проведенный расчет показывает искусственность использованного граничного условия на открытом конце образца.

На фиг.5 приведены результаты расчета для той же самой задачи, но с учетом испарения жидкости с поверхности. В этом случае разделение потока пара на фронте испарения происходит с самого начала процесса испарения.

На фиг.6 иллюстрируется динамика процесса конденсации при понижении температуры на закрытом конце. В начальный момент времени температура в образце постоянна,  $S_0(x) = 0,1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , и жидкость неподвижна. При понижении температуры на закрытом конце температура и давление пара убывают вдоль образца. Жидкость конденсируется сначала лишь в одной последней точке  $x = 1$ , являющейся фронтом конденсации, а в остальных точках испаряется. В точке  $x = 0$  из-за наличия внешнего потока испарение максимально. Конденсация пара на закрытом конце вызывает "подсос" влажного воздуха внутрь образца. Это видно из графика  $u(x)$ . Постепенно зона конденсации увеличивается, и количество конденсировавшейся жидкости растет. Трех кривым на графиках соответствуют моменты времени  $t_1 = 0,003262$ ,  $t_2 = 0,06850$ ,  $t_3 = 0,1370$ .

На фиг.7 показана стадия процесса конденсации влаги, на которой конденсировавшаяся жидкость становится подвижной. Благодаря капиллярным силам конденсация сопровождается впитыванием жидкости внутрь образца. На графиках  $S(x)$  четко фиксируется возникновение фронта пропитки.

На фиг.8 и 9 приведены результаты расчета для задачи испарения при большой начальной водонасыщенности, соответственно, без учета и с учетом испарения жидкости с поверхности. Процесс испарения сопровождается капиллярным "подсосом" жидкости из глубины образца, поэтому водонасыщенность падает во всех точках одновременно. Графики на фиг.8 отвечают большим капиллярным силам или большой проницаемости среды - перераспределение жидкости в образце происходит значительно быстрее ее испарения. Результаты расчетов на фиг.9 отвечают меньшей проницаемости и замедленному перераспределению насыщенности. Заметим, что в обоих случаях поток пара направлен наружу только на границе образца и внутрь - в остальной его части. Конденсирующаяся внутри влага возвращается к границе образца за счет капиллярного перемещения жидкости.

Следующая серия расчетов была выполнена с использованием модели (II), учитывающей переменность давления в газовой фазе. При испарении жидкости на открытом конце образца (фиг. 10) возникает характерное немонотонное распределение суммарного давления в газовой фазе с максимумом на некотором расстоянии от поверхности. Здесь обнаруживаются те же самые закономерности процесса, что и для модели (I). Пик давления в газовой фазе отвечает фронту испарения, на котором происходит разделение потока пара. В результате распределение насыщенности в образце становится немонотонным.

На фиг. 11 показано решение задачи об охлаждении образца, насыщенного жидкостью  $S_0(x) = 0,2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Температура понижается скачком на открытом конце ( $x = 0$ ). Температура внутри образца постепенно убывает. Вблизи открытого конца пар конденсируется; в остальных точках (кроме  $x = 1$ ) жидкость испаряется. В точке  $x = 1$  из-за отсутствия с обеих сторон диффузионного и конвективного потоков насыщенность увеличивается только за счет понижения температуры в этой точке. Далее фронт конденсации углубляется внутрь. Под действием капиллярных сил насыщенность выравнивается в той области, где она становится больше предельной. На открытом конце поток  $u$  направлен внутрь образца, на закрытом конце - наружу. Решение аналогичной задачи при "неподвижной" начальной насыщенности  $S_0(x) = 0,1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  показано на фиг. 12. Насыщенность в зоне конденсации не достигает предельного значения, поэтому распределение насыщенности оказывается немонотонным. Трём кривым соответствуют моменты времени:  $t_1 = 0,1$ ;  $t_2 = 0,6$ ;  $t_3 = 1,1$ . Изменения содержания массы жидкости, пара и воздуха в образце с течением времени демонстрируются на фиг. 13, где на горизонтальной оси отложено время, отнесенное к характерному диффузионному времени, а по оси ординат - массы жидкости (кривая 1), пара (кривая 2) и воздуха (кривая 3) в образце.

На фиг. 14 показаны зависимости от времени суммарных массовых содержаний жидкости (1), пара (2) и воздуха (3) для случая, показанного на фиг. 5 и отвечающего нагреву образца.

Следующая серия расчетов была проведена для задачи о периодическом изменении температуры и влажности воздуха на открытом конце образца. Моделировались суточные колебания температуры и влажности воздуха на поверхности почвенного слоя. Начальный момент времени отвечает 6 часам утра, температура в образце  $T_0(x) = 20^\circ\text{C}$ . Период колебаний - 24 часа; максимальная температура достигается в 12 часов дня -  $40^\circ\text{C}$ ; минимальная - в 24 часа -  $0^\circ\text{C}$ . При этом парциальное давление пара  $P_2$  на поверхности менялось периодически. При максимальной температуре  $P_{21}$  составляло 0,2 от давления насыщенного, при минимальной - величины  $P_{21}$  и  $P_{21}^*$  совпадали. Законы изменения температуры и давления пара на поверхности почвы в безразмерных переменных выписались в следующем виде:

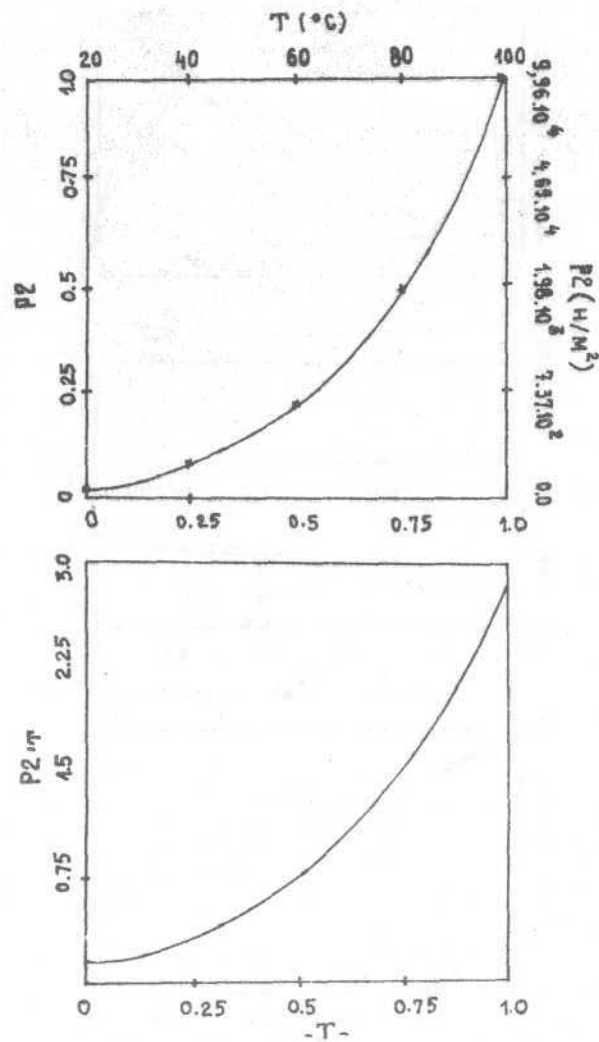
$$T_1(t) = \sin \frac{\pi \cdot 10^{-4} t_D}{4,32} t$$

$$P_{21}(t) = [-0,4 T_1(t) + 0,6] P_2^*(T_1)$$

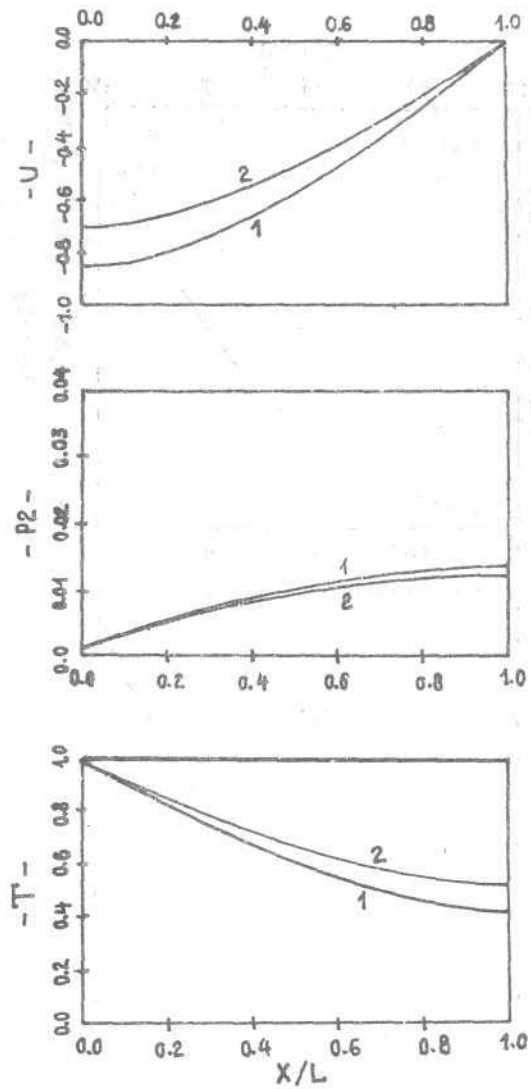
где  $t$  - время, отнесенное к характерному диффузионному времени,  $T_1$  меняется от -1 до 1.

На фиг. 15 показаны распределения температуры, насыщенности и давления пара при максимальной температуре в последовательные моменты времени, которые показаны на графике для температуры на поверхности почвы  $T_1$ . Кривые 1-3 на фиг. 15 и 16 отвечают моментам времени  $t_1 = 3,65$ ,  $t_2 = 8,5$ ,  $t_3 = 13,4$ . Начальное распределение насыщенности было  $S_0(x) = 0,1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Кривые распределения температуры  $T$  в образце практически совпадают, а фронт испарения постепенно углуб-

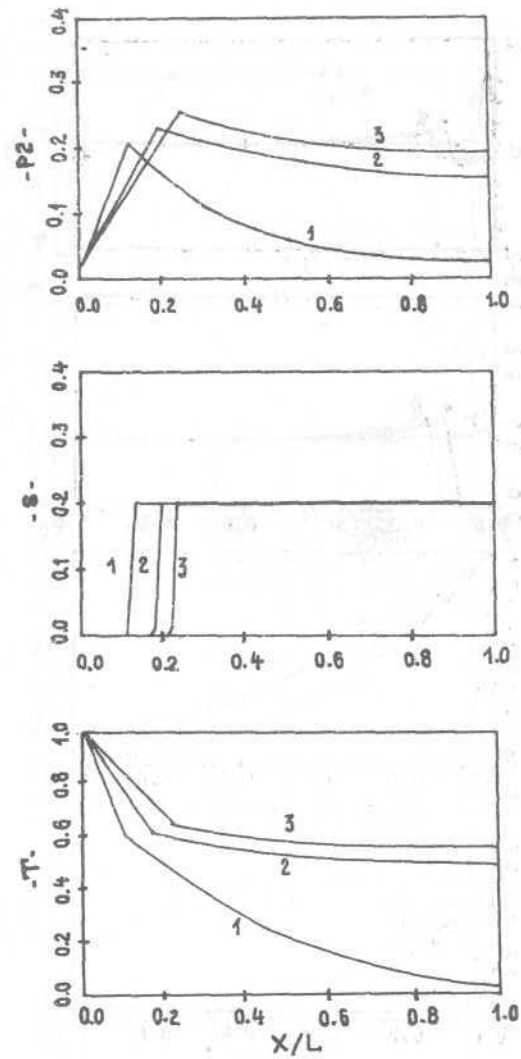
ляется внутрь. В последних точках насыщенность почти не меняется. Результаты расчетов при начальной насыщенности  $S_0(x) = 0,4$ ,  $0 \leq x \leq 1$  показаны на фиг.16. Проницаемость почвы была высока, поэтому в каждый момент времени насыщенность выравнивается во всем образце. Испарение жидкости, благодаря капиллярному подосу к поверхности, происходит интенсивнее, чем конденсация, и насыщенность постепенно падает.



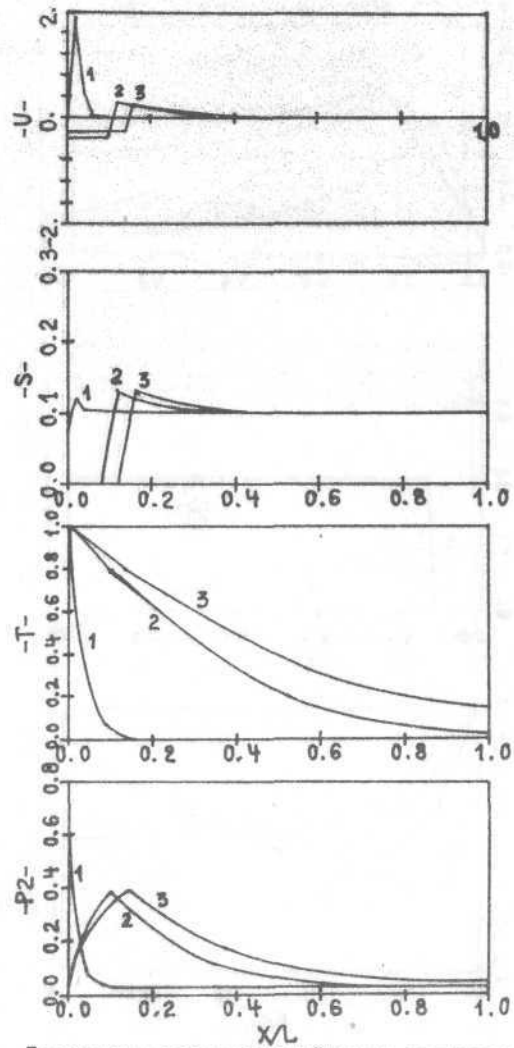
Фиг.1 - Зависимость давления насыщенного пара  $P_2^*$  и его производной  $P_2^*/T$  от температуры.



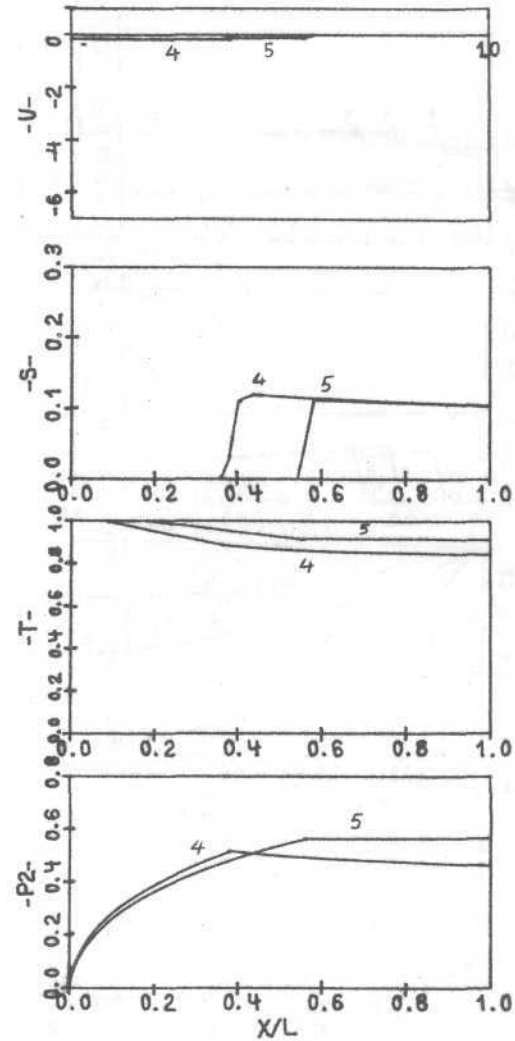
Фиг.2 - Прогрев влажного образца при отсутствии жидкости.



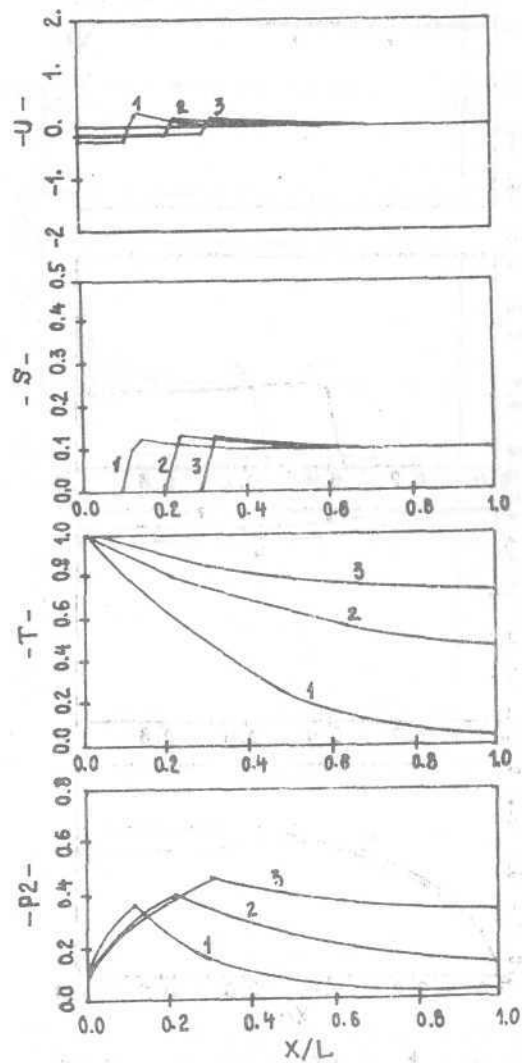
Фиг.3 - Сушка влажного образца  $S_0(x) = 0,2$ ,  $0,1 \leq x \leq 1$



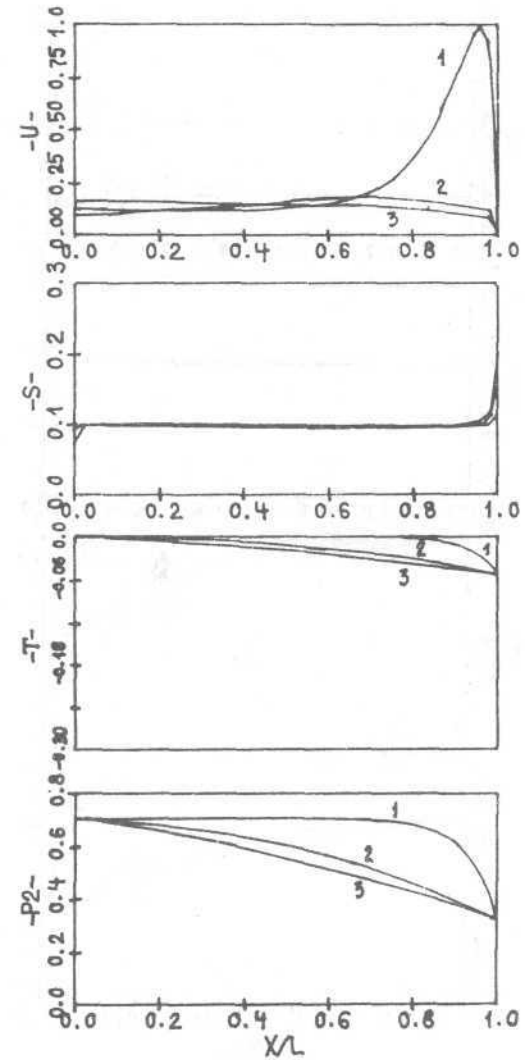
Фиг.4а - Динамика перемещения фронта испарения при прогреве влажного образца с "неподвижной" начальной насыщенностью  $S_0(x) = 0,1; 0 \leq x \leq 1$  (без учета диффузионного потока с поверхности).  
 1 -  $t_1 = 0,1 \cdot 10^{-8}$ ; 2 -  $t_2 = 0,065$ ; 3 -  $t_3 = 0,104$ .



Фиг.4б - 4 -  $t_4 = 0,98$ ; 5 -  $t_5 = 1,96$ .

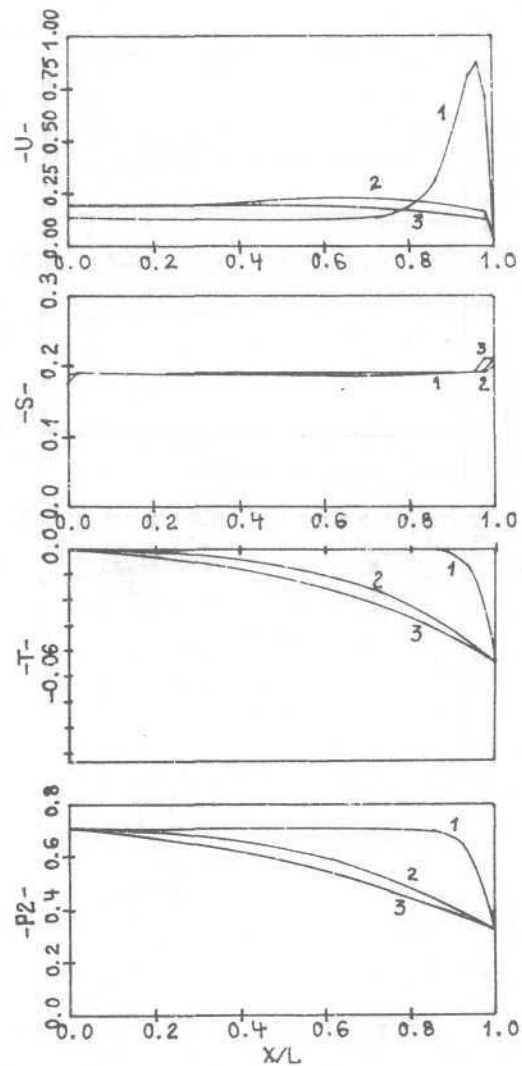


Фиг. 5 - Сушка влажного образца с "неподвижной" начальной насыщенностью  $S_0(x) = 0,1$ ;  $0 \leq x \leq 1$  (с учетом диффузионного потока с поверхности)

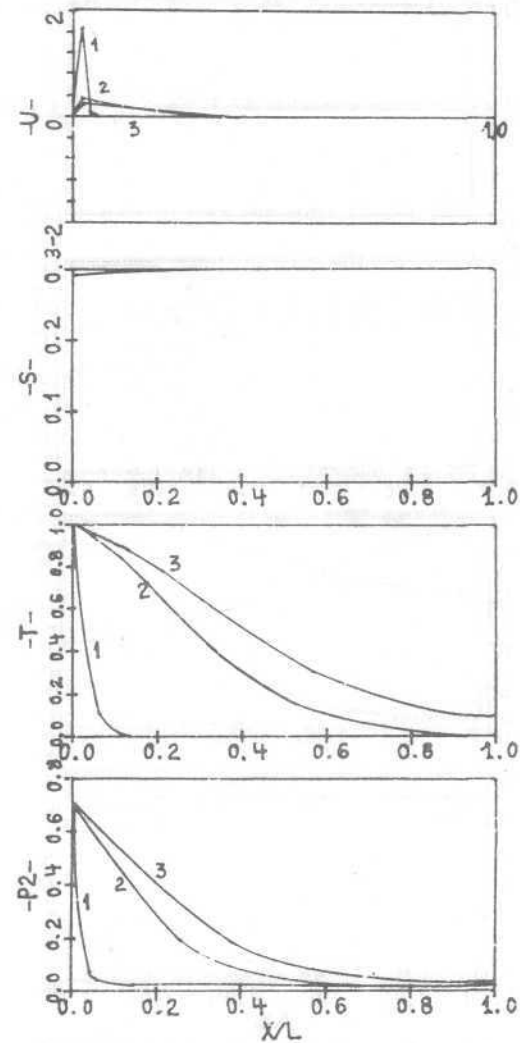


Фиг. 6 - понижение температуры на закрытом конце влажного образца с начальной насыщенностью  $S_0(x) = 0,1$  приводит к конденсации пара вблизи границы.

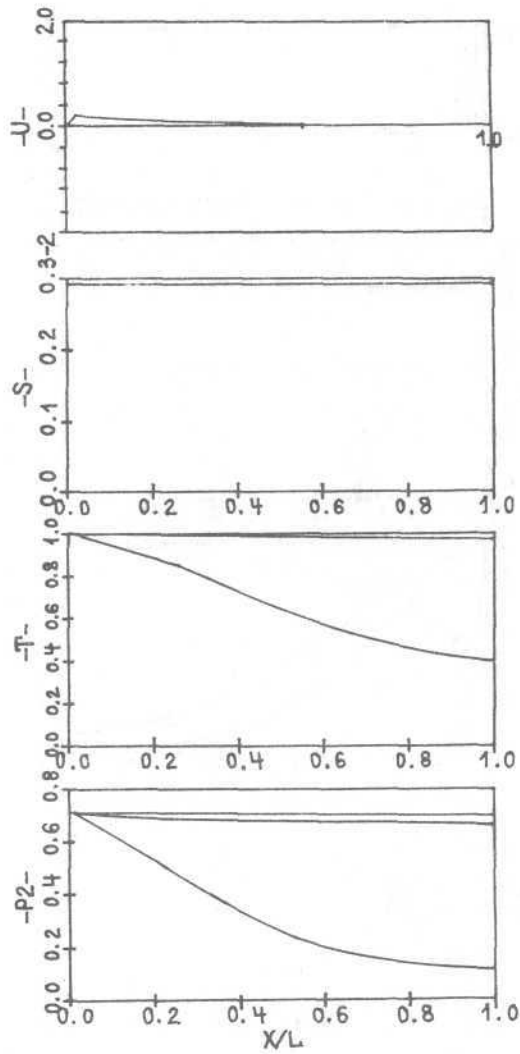




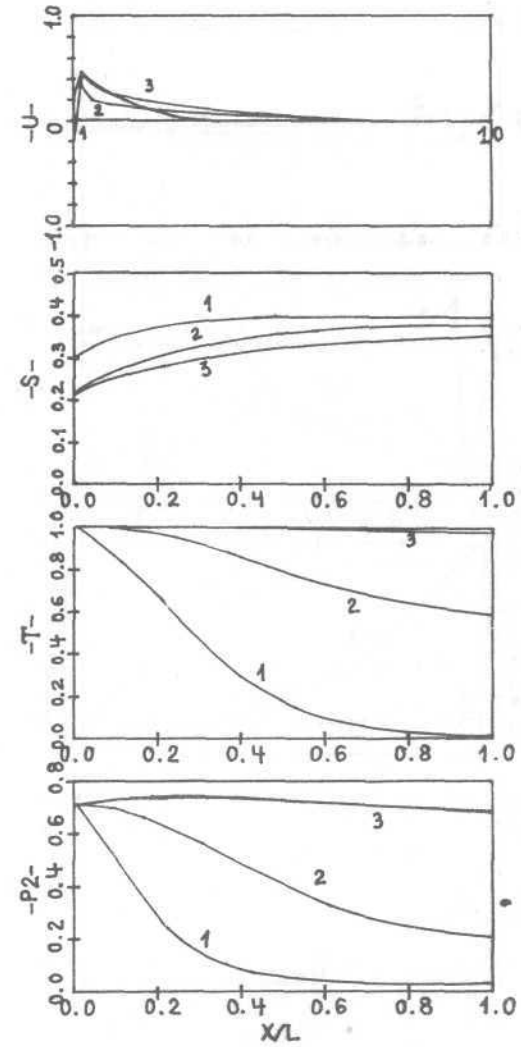
Фиг.7 - Увеличение насыщенности за счет конденсации пара сопровождается капиллярным впитыванием жидкости внутрь образца от его охлаждаемой поверхности ( $S_0(x) = 0,2$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ).



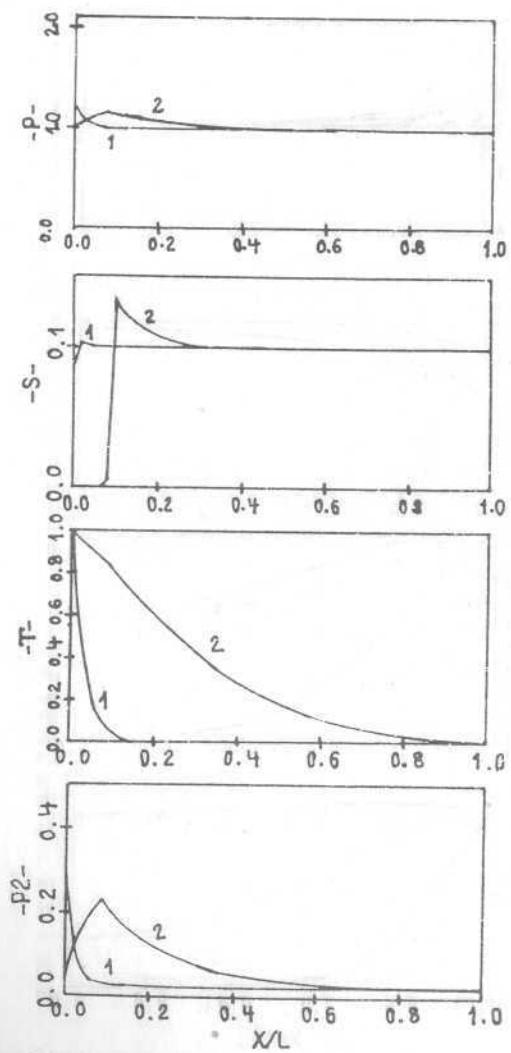
Фиг.8 а - Прогрев влажного образца с "подвижной" начальной насыщенностью ( $S_0(x) = 0,3$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ) без учета диффузионного потока с поверхности.



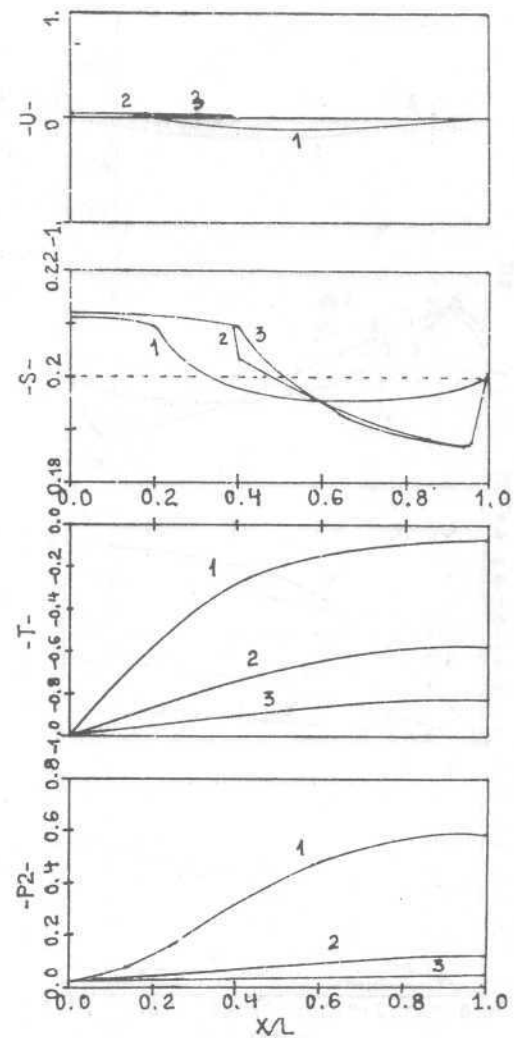
Фиг.8б - Следующая стадия прогрева. За счет капиллярных сил насыщенность медленно падает во всем образце.



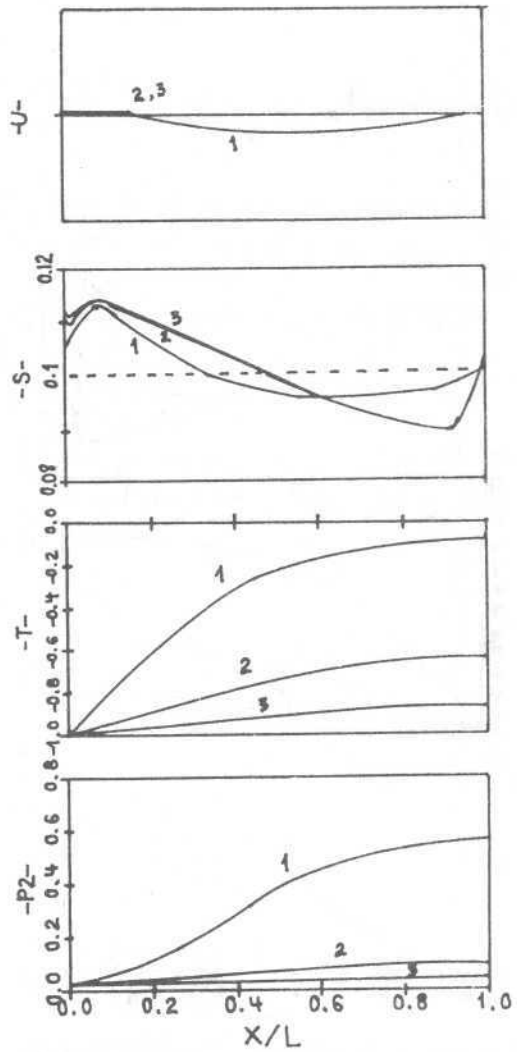
Фиг.9 - Прогрев влажного образца с начальной подвижной насыщенностью ( $S_0(x) = 0,4; 0 \leq x \leq 1$ ) с учетом диффузионного потока с поверхности.



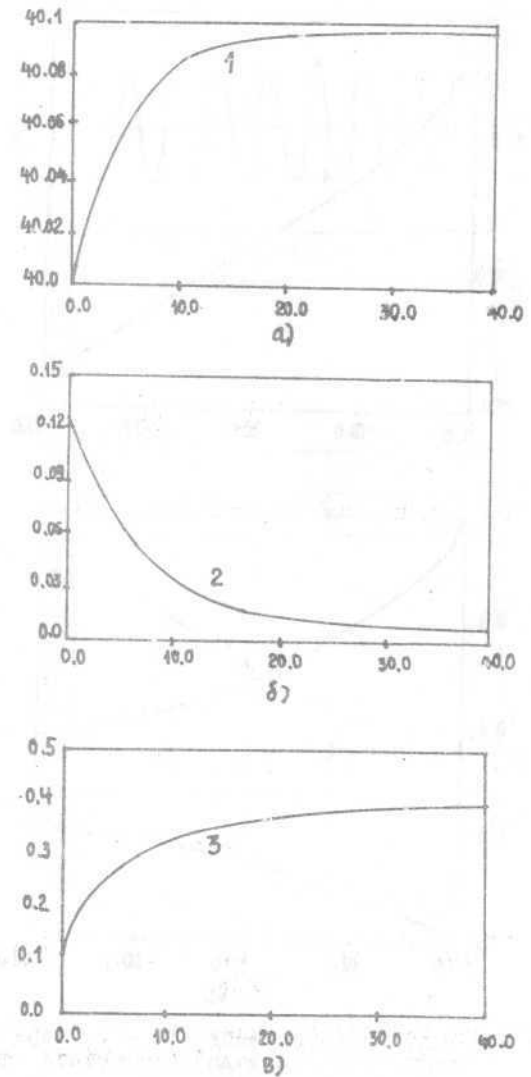
Фиг.10 - Сушка влажного образца ( $S_0(x) = 0,1$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ) с учетом переменной давления в газовой фазе.



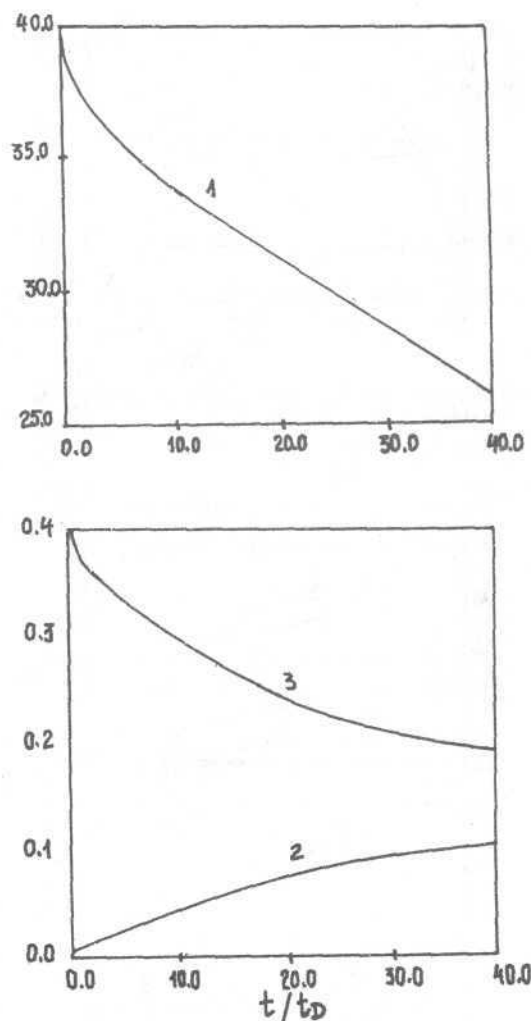
Фиг.11 - Понижение температуры на открытом конце в отсутствие диффузионного потока с поверхности. Случай "подвижной" насыщенности ( $S_0(x) = 0,2$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ).



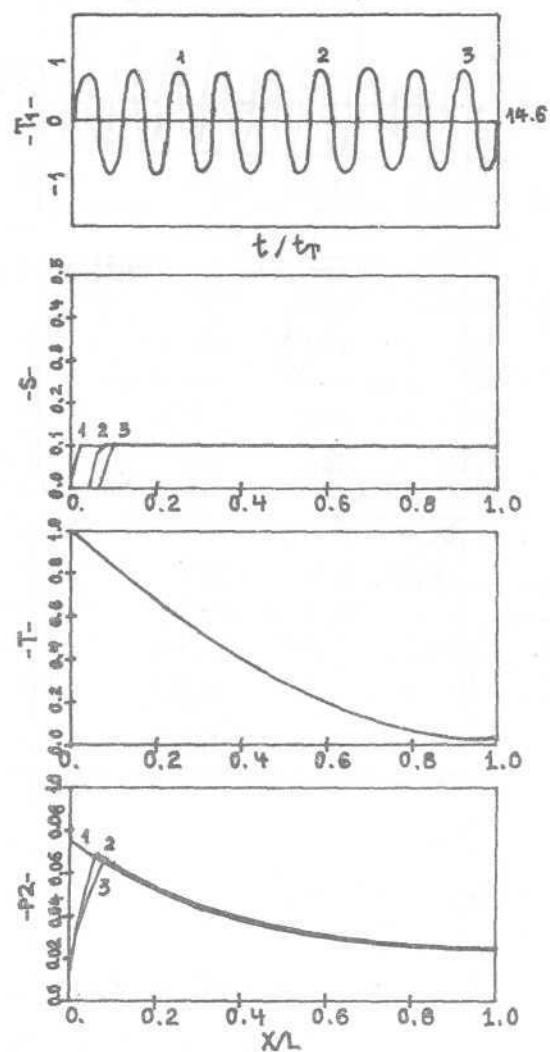
Фиг.12 - Понижение температуры на открытом конце без учета диффузионного потока с поверхности. Случай неподвижной жидкости ( $S_0(x) = 0,1$ ;  $0 \leq x \leq 1$ )



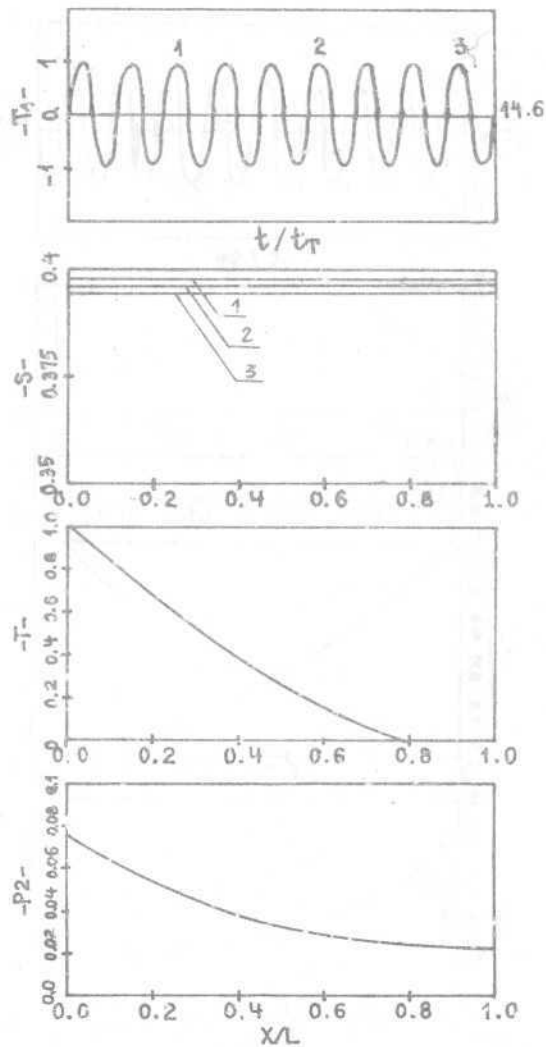
Фиг.13 - Изменение массы жидкости - 1, пара - 2 и воздуха - 3 внутри образца для задачи конденсации (фиг.12).



Фиг.14 - Изменение массы жидкости - 1, пара - 2 и воздуха - 3 для задачи испарения (фиг.5).



Фиг.15 - Периодическое изменение температуры и влажности на поверхности почвы с начальной "неподвижной" насыщенностью  $S_0(x) = 0,1$ ;  $0 \leq x \leq 1$



Фиг.16 - Периодическое изменение температуры и влажности на поверхности почвы с начальной "подвижной" насыщенностью  $S_c(x) = 0,4$ ;  $0 \leq x \leq 1$

Таблица I

$t \backslash x$		0,1	0,3	0,5	0,7	I
0,135	I	0,8476	0,5648	0,3398	0,1903	0,1086
	2	0,8467	0,5628	0,3383	0,1905	0,1117
0,27	I	0,8972	0,7020	0,5368	0,4174	0,3470
	2	0,8971	0,7019	0,5370	0,4185	0,3502
0,405	I	0,9267	0,7872	0,6685	0,5824	0,5313
	2	0,9268	0,7876	0,6694	0,5840	0,5345
0,54	I	0,9474	0,8475	0,7625	0,7007	0,6641
	2	0,9476	0,8481	0,7635	0,7024	0,6670
0,675	I	0,9623	0,8907	0,8298	0,7855	0,7592
	2	0,9625	0,8913	0,8308	0,7871	0,7617

I - аналитическое решение, найденное методом разделения переменных;

2 - численное решение;

число узлов сетки - 100; время счета - 2'



Таблица 2

Номер итерации	$x$	$T$	$P_2$	$u$
1	0	I	0	$-0,3728 \cdot 10^{-2}$
	0,3	$0,5324 \cdot 10^{-4}$	0	$-0,2111 \cdot 10^{-2}$
	0,5	$0,7535 \cdot 10^{-7}$	0	$-0,2987 \cdot 10^{-5}$
	I	$0,1136 \cdot 10^{-13}$	0	0
2	0	I	0	$-0,3727 \cdot 10^{-2}$
	0,3	$0,5306 \cdot 10^{-4}$	$0,2948 \cdot 10^{-17}$	$-0,2103 \cdot 10^{-2}$
	0,5	$0,7493 \cdot 10^{-7}$	$0,4163 \cdot 10^{-20}$	$-0,2970 \cdot 10^{-5}$
	I	$0,1123 \cdot 10^{-13}$	$0,6238 \cdot 10^{-27}$	0
3	0	I	0	$-0,3727 \cdot 10^{-2}$
	0,3	$0,5306 \cdot 10^{-4}$	$0,2948 \cdot 10^{-17}$	$-0,2103 \cdot 10^{-2}$
	0,5	$0,7493 \cdot 10^{-7}$	$0,4163 \cdot 10^{-20}$	$-0,2970 \cdot 10^{-5}$
	I	$0,1123 \cdot 10^{-13}$	$0,6238 \cdot 10^{-27}$	0

Таблица 3

Номер итерации	$x$	$T$	$S$	$u$
1	0	I	$-0,4357 \cdot 10^{-4}$	$-0,1661 \cdot 10^{-1}$
	0,2	$0,1488 \cdot 10^{-1}$	$0,6654 \cdot 10^{-6}$	$0,1420 \cdot 10^{-4}$
	0,5	$0,2702 \cdot 10^{-4}$	$0,1085 \cdot 10^{-8}$	$0,8615 \cdot 10^{-8}$
	I	$0,5506 \cdot 10^{-7}$	$0,3242 \cdot 10^{-11}$	0
2	0	I	$-0,5547 \cdot 10^{-4}$	$-0,1589 \cdot 10^{-1}$
	0,2	$0,1481 \cdot 10^{-1}$	$0,7497 \cdot 10^{-6}$	$0,3260 \cdot 10^{-4}$
	0,5	$0,2684 \cdot 10^{-4}$	$0,1079 \cdot 10^{-8}$	$0,7162 \cdot 10^{-8}$
	I	$0,5453 \cdot 10^{-7}$	$0,3251 \cdot 10^{-11}$	0
3	0	I	$-0,5546 \cdot 10^{-4}$	$-0,1588 \cdot 10^{-1}$
	0,2	$0,1479 \cdot 10^{-1}$	$0,7484 \cdot 10^{-6}$	$0,3249 \cdot 10^{-4}$
	0,5	$0,2680 \cdot 10^{-4}$	$0,1077 \cdot 10^{-8}$	$0,6817 \cdot 10^{-8}$
	I	$0,5446 \cdot 10^{-7}$	$0,3252 \cdot 10^{-11}$	0

Л и т е р а т у р а

1. Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: ГИТЛ, 1954, 246 с.
2. Лыков А.В. Теория сушки. М.-Л., Госэнергоиздат, 1950, 416 с.
3. Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах. Под редакцией Лыкова А.В. и Смольского Б.М., Минск, 1965, 156 с.
4. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Физика почвы. М.: Наука, 1967, 583 с.
5. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976, 352 с.
6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963, 396 с.
7. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Ризик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972, 288 с.
8. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970, 335 с.
9. Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968, 190 с.
10. Розенберг М.Д., Кундин С.А., Курбанов А.К. и др. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М.: Недра, 1969, 456 с.
11. Whitaker S. Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media; a theory of drying. - Advances in Heat Transfer, vol.13, Academic Press, N.Y., 1977, p.119-203.
12. Whitaker S. Toward a diffusion theory of drying. - Ind. Eng. Chem., Fundam., 1977, vol.16, № 4, p.408-414.
13. Whitaker S., Chou W. Drying granular porous media. - Theory and Experiment. - Drying Technology, 1983, vol.1, № 1, p.3-33.

14. Udell K.S. Heat transfer in porous media heated from above with evaporation, condensation and capillary effects. Trans. ASME J. of Heat Transfer, 1983, v.105, № 3, p.485-492.
15. Вукалович М.П., Новиков И.И. Техническая термодинамика. М.: Энергия, 1968, 496 с.
16. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964, 350 с.
17. Бан А., Богомолова А.Ф. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: Гостоптехиздат, 1962, 276 с.
18. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977, 439 с.
19. Вукалович М.П. Таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара. М., 1963, 80 с.

## О г л а в л е н и е

§ 1. Процессы теплового переноса в капиллярно-пористых материалах . . . . .	3
§ 2. Уравнения теплового переноса в капиллярно-пористых телах . . . . .	4
§ 3. Теплового перенос при постоянном давлении в газовой фазе . . . . .	8
§ 4. Преобразования полученных систем уравнений	10
§ 5. Постановка основных задач . . . . .	17
§ 6. Численный метод . . . . .	21
§ 7. Исходные данные . . . . .	30
§ 8. Методические расчеты . . . . .	33
§ 9. Примеры решенных задач . . . . .	37
Ф и г у р ы . . . . .	43
Л и т е р а т у р а . . . . .	64